1 Approximation par des rationnels

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Soit (p_n) une suite d'entiers, (q_n) une suite d'entiers naturels non nuls, tels que

$$\lim_n \frac{p_n}{q_n} = \alpha$$

Montrer que (q_n) tend vers $+\infty$.

2 Approximation par des rationnels

On fixe un réel $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

1- Soit $n \geq 1$. Soit

$$X_n = \{k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor \, / \, 0 \leq k \leq n\}$$

A l'aide de X_n, montrer l'existence de p et q entiers tels que

$$1 \leq q \leq n, \, |q\alpha - p| \leq \frac{1}{n}$$

2- Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}^*, \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\varepsilon}{q}$$

3- Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels (q_n) strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

3 Les réseaux

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n.

On appelle réseau un sous-groupe G de E tel que $\{0\}$ est un point isolé de G.

Soit r le rang de G, c'est-à-dire la dimension de $F = \mathrm{Vect}\,(G)$.

On veut montrer l'existence de $(e_1, e_2, ...e_r)$ tel que

$$G = \underset{1 \leq j \leq r}{\oplus} \mathbb{Z} e_j$$

On se donne un réseau G.

1- Montrer que tout point de G est isolé.

2- Montrer que G est fermé dans E.

3- Montrer le résultat dans le cas $r = 1$.

4- Soit $r \geq 2$. On suppose le résultat au rang $r - 1$.

Soit $(a_1, ..., a_r)$ une base de F constituée d'éléments de G. On note

$$H = \mathrm{Vect}\,(a_1, ..., a_{r-1})$$

et

$$G' = H \cap G$$

Montrer que G' est un réseau de rang $r - 1$.

On en déduit l'existence de $(e_1, e_2, ...e_{r-1})$ telle que

$$G' = \underset{1 \leq j \leq r-1}{\oplus} \mathbb{Z} e_j$$

5- Soit $\varphi \in F^*$ une forme linéaire de noyau H.

Montrer que $\varphi\,(G)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ monogène.

6- Conclure.

4 Approximation uniforme

Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ et $\varepsilon > 0$.

On va montrer l'existence de $p_1, ..., p_n$ entiers, et q entier naturel non nul tels que

$$\forall j, \left|\alpha_j - \frac{p_j}{q}\right| \leq \frac{\varepsilon}{q}$$

1- Soit G le sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ engendré par α et les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que G n'est pas un réseau.
2- Conclure.

Indications

1- Examiner la matrice de passage de la base canonique à la base du réseau.
2- Utiliser le fait que 0 n'est pas isolé dans G.

5 La constante de Liouville

Soit

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

On va montrer que α est transcendant.

1- Soit β un réel algébrique, de polynôme minimal P de degré $d \geq 1$. Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{\beta\}, |\beta - r| \geq \frac{C}{q^d}$$

2- En utilisant

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$$

montrer que α est transcendant.