Convexité

1 Si f est convexe, montrer que $g : x \to f(-x)$ est convexe. Que dire de $h : x \to -f(x)$?

2 Montrer que si f est convexe, et g convexe croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Exemples ?

3 Montrer que l'image, l'image réciproque d'un convexe par une application linéaire sont des convexes.
Même question avec une application affine.

4 Soit A partie convexe de E telle que $a \in A$, $b \in \overset{\circ}{A}$; montrer que $]a,b] \subset \overset{\circ}{A}$. Même question si $a \in \overline{A}$.

5 Soit I un intervalle et $X = \{(x,y) \in I^2 / x < y\}$; montrer que X est convexe ; où sert X ?

6 Que dire de f si f et $-f$ sont convexes sur $\mathbb{R}$? Si f et g sont convexes sur $\mathbb{R}$ et $f+g$ affine ?

7 Soit $I =]0, +\infty[$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : x \to xf(1/x)$. Montrer que f est convexe SSI g est convexe.

8 Dans $E = M_n(R)$, les parties suivantes sont-elles convexes :
- l'ensemble des matrices nilpotentes,
- l'ensemble des matrices inversibles,
- l'ensemble des matrices diagonalisables,
- l'ensemble des matrices orthogonales,
- l'ensemble des matrices de déterminant positif.

9 Que dire d'une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}+$? d'une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}$?

10 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ bistochastique ; soit X une colonne positive ; soit $Y = AX$; montrer que $\prod_{i=1}^{n} y_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i$.

11 Soit $a, b, x, y > 0$. Montrer que $x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}$. (Utiliser la concavité de ln).

12 Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f a une limite (finie ou non) en 0.

13 Soit $x_1, ..., x_n > 0$. Montrer que $x_1/x_2 + x_2/x_3 + ... + x_n/x_1 \geq n$.

14 Soit $g : [0, 1] \to]0, +\infty[$ C°. Montrer que : $\int_0^1 g \,.\, \ln \int_0^1 g \leq \int_0^1 g.\ln(g)$. Quand y a-t-il égalité ?

15 Montrer que le max de 2 fonctions convexes sur I est convexe sur I. Généraliser à plusieurs, à une infinité si le sup existe. Que dire du min ?
Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$. Montrer que l'ensemble des fonctions $g \leq f$ et convexes possède un plus grand élément.

16 Montrer que l'enveloppe convexe d'un ouvert est un ouvert.

17 Soit A une partie convexe non vide de E $\mathbb{R}$-EVN. Montrer que $x \to d(x, A)$ est convexe.

18 Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. **a** On suppose $f'' > 0$. Montrer que f possède au plus un minimum local, et que s'il en existe un, c'est un minimum absolu. **b** On suppose $f'' > a > 0$; montrer que f possède un minimum.