Equations différentielles, exponentielle

1 Résoudre $y''+4y = 2\tan x$ (MVC) ; $y''-y = \frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}$ (trouver une solution "évidente").

2 Identifier une solution DSE de $xy''+2y'+xy = 0$, résoudre à l'aide d'un changement de fonction.

3 $y''-x^2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Montrer que cela définit une solution unique y.
Domaine de définition de y ? Montrer que y est paire, positive. Tracé de y.

4 Soit f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(-x)+f(x) = e^x$. Montrer que f est de classe C^∞, vérifie une EDL d'ordre 2, déterminer f.

5 Trouver les solutions DSE de $xy''+2y'-xy = 0$, puis résoudre l'équation.

6 Résoudre (E) : $y''(x)+y'(x)+y(x)e^{-2x} = 0$ en posant $y(x)= z(e^{-x})$.

7 Résoudre $\{\ x'(t) = -2x-8y,\ \ y'(t) = -3x-4y\ \}$ par exemple avec une base de vecteurs propres.

8 Montrer que
a Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\exp(A) \in \mathbb{R}[A]$; si $A \notin S_n(\mathbb{R})$?
b Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B = \exp(A)$, alors $A\in\mathbb{R}[B]$.
c Soit $A, B\in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB = BA$ SSI $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent.

9 Soit (E) : $y''+q(x)y = 0$, où q est C° négative sur $\mathbb{R}$.
a Montrer l'existence d'une solution y_1 telle que $y_1(0) = y_1'(0) = 1$.
b Montrer que : $\forall\, t \geq 0,\ y_1(t) \geq 1+t$.
c Soit $y_2(t) = y_1(t)\int_t^{+\infty}\frac{du}{y_1{}^2(u)}$; montrer que y_2 est une solution de (E) bornée sur $\mathbb{R}+$.
d Quel est l'ensemble des solutions de (E) bornées sur $\mathbb{R}+$?

10a : Calculer $\exp(A)$, où $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. **b :** Soit $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Montrer que $B \notin \exp M_2(\mathbb{R})$.

11 Soit a, b fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; soit (E) : $y''+ay'+by=0$; montrer que (E) possède un SFS (f,g) avec f paire et g impaire si et seulement si a est impaire et b paire.

12 Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer l'existence de α et β tels que $\exp(A) = \alpha I_2+\beta A$ et les calculer. On pourra commencer par le cas où A n'est pas diagonalisable.

13 Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente, telle que $\exp(N) = I_n$; montrer que $N = 0$.
Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$; montrer que M est diagonalisable SSI $\exp M$ est diagonalisable.

14 Soit A et B éléments de $M_n(\mathbb{C})$, et $C = AB-BA$; on suppose que C commute avec A et B.
Montrer que : $\forall\, k \geq 1,\ A^kB-BA^k = kA^{k-1}C$. Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}C}$.

15 Soit S l'ensemble des solutions réelles de $y^{(n)}+...+a_1y'+a_0y = 0$, où les a_k sont n réels ; dim S ?
Montrer que S est stable par D (dérivation) ; trace, det D ?

16 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}+, \mathbb{R})$ monotone et ayant une limite finie en $+\infty$. Que peut-on dire de f' ?
Montrer que les solutions de $y'' + y = f$ sont bornées sur $\mathbb{R}+$.

17 Résoudre $y''+6y'+9y = \dfrac{\exp(-3x)}{\sqrt{1-x^2}}$ en posant $y(x) = z(x)e^{-3x}$.

18 $E = \mathbb{R}^n$ est muni du PSC ; pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $A \geq 0$ si : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $(Ax / x) \geq 0$.
Montrer l'équivalence entre :
a $A \geq 0$.
b Pour tout $t \geq 0$, $\exp(-tA)$ est 1-lipschitzienne.
c pour tout $x \in E$, $t \to \|\exp(-tA)x\|^2$ est décroissante.
Quel rapport y a-t-il avec les matrices symétriques positives ?

19 Soit $t \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_n (1+i\dfrac{t}{n})^n$? (utiliser module et argument). En déduire $\lim\limits_n M_n{}^n$, où $M_n = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{t}{n} \\ \dfrac{t}{n} & 1 \end{bmatrix}$.

20 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; on note $f_a : t \to f(t+a)$; on suppose la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ de rang fini ; montrer que f est une exponentielle-polynôme.

21 Soit A et B éléments de $M_n(\mathbb{R})$; montrer que $\exp(A) - \exp(B) = \int_0^1 e^{sA}.(A-B).e^{(1-s)B}\, ds$.

22 Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente ; montrer que $\mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}(\exp N - I_n)$.

23a Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$; montrer que $\forall\, X \in O(n)$, $\mathrm{tr}\, MX \leq \mathrm{tr}\, M$.
b Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique ; montrer que $\exp(A) \in O(n)$.
c Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que : $\forall\, X \in O(n)$, $\mathrm{tr}\, MX \leq \mathrm{tr}\, M$; montrer que $M \in S_n^+(\mathbb{R})$.

24 Montrer que l'application exponentielle induit une bijection de $S_n(\mathbb{R})$ sur S_n^{++}.

25 Etudier $J_0(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin t)dt$. EDL d'ordre 2 ? $\lim\limits_{+\infty} J_0$? DSE ? Montrer que J_0 a un seul zéro sur $]\dfrac{\pi}{2}, \pi[$.

26 Soit ψ MDG continu de $\mathbb{R}$ dans $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de θ C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact d'intégrale 1. Soit $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(s)\Psi(s+t)ds$. Montrer que f, puis Ψ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

27 Soit $b \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Montrer que toute solution de $y''-2xy'+by = 0$ est entière, et $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)e^{-ax^2} = 0$.

28 Soit $A \in C^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C}))$; on suppose qu'il existe $S \in C^1(\mathbb{R}, GL_n(\mathbb{C}))$ tel que pour tout t, $A(0) = S^{-1}(t)A(t)S(t)$. Montrer qu'il existe $B \in C^\circ(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C}))$ tel que $A' = AB - BA$.
Inversement, on suppose qu'il existe $B \in C^\circ(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C}))$ tel que $A' = AB - BA$; montrer que $\mathrm{tr}\, A^k$ est constant pour tout k, que $\mathrm{Sp}\, A$ est constant, et qu'il existe $S \in C^1(\mathbb{R}, GL_n(\mathbb{C}))$ tel que pour tout t, $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$.