# Fonctions convexes

## 1 $x \to \ln(1+e^x)$

Soit

$$f : x \to \ln(1+e^x)$$

1- Montrer que $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2- Soit $n \geq 2$ et $a_1, ..., a_n$ des réels strictement positifs de produit 1. Montrer que

$$3^n \leq \prod_{j=1}^{n} (2+a_j)$$

**Réponse**

1-

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Il est clair que $f'$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2- Notons $u_j = \ln a_j$. On doit montrer que

$$\ln 3 \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln(2+e^{u_j})$$

Ce qui découle de la convexité de

$$g : x \to \ln(2+e^x)$$

## 2 $X^T.A.X$

Soit $E$ un espace euclidien.

1- Montrer que

$$f : x \to \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

est convexe sur $E$.

2- Soit $A$ une matrice symétrique définie positive ; montrer que

$$g : X \to X^T.A.X$$

est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

**Indications**

Pour le 1, appliquer la définition.

Pour le 2, on peut aussi appliquer la définition, ou remarquer que

$$\langle X, Y \rangle = X^T.A.Y$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

## 3 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Soit $a<b$ et $f$ convexe sur $I=[a,b]$ ; soit $c=\frac{a+b}{2}$.

1- On suppose $f$ dérivable ; montrer que

$$f(c) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

2- Même question en supposant seulement $f$ continue.

**Réponse**

1- Soit $g$ la fonction affine qui coïncide avec $f$ en $a$ et $b$ ; alors :

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Soit $h : t \to f(c)+(t-c)f'(c)$ : sa représentation graphique est la tangente au point $c$.

$$\int_a^b f \geq \int_a^b h = (b-a).f(c)$$

2- On peut se ramener au cas où $c=0$, soit $a=-b$. On remarque que

$$\forall u \in I, f(c)=f(0) \leq \frac{f(u)+f(-u)}{2}$$

Dans ce cas, par changement de variable :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(-u)\,\mathrm{d}u$$

Donc

$$\int_a^b f = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f(u)+f(-u)\right)\mathrm{d}u \geq \int_a^b f(0)\,\mathrm{d}u = (b-a).f(0)$$

Autre méthode : on pourrait utiliser une demi-tangente à défaut d'une tangente.

## 4 $\frac{1}{2}f(0)+f(1)+...f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)$

Soit $f$ dérivable convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit

$$s_n = \frac{1}{2}f(0)+f(1)+...f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)$$

Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq s_n - \int_0^n f \leq \frac{1}{8}\left(f'(n)-f'(0)\right)$$

**Indications**

On se ramène au cas $n=1$ et $f(0)=f'(0)=0$.

Soit $h=f(1)$, $p=f'(1)$, $A=(0,0)$ , $B=(1,h)$, et $C=(c,0)$ intersection de la tangente en $B$ avec l'axe $Ox$.

On étudie l'aire du triangle $(A,B,C)$ :

$$\frac{1}{2}.h.c = \frac{1}{2}.p.c.(1-c) \leq \frac{p}{8}$$

# 5 Trace et fonctions convexes

Soit $f$ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

1- Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$. Soit

$$\Omega = \left\{ P.S.P^{-1} / \, P \in O_n(\mathbb{R}) \right\}$$

Soit $A \in \Omega$. Montrer que

$$\forall j \in \{1, ...n\}, \, \lambda_1 \leq a_{j,j} \leq \lambda_n$$

2- Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} f(a_{j,j}) \, / \, A \in \Omega \right\}$$

3- Pour tout endomorphisme symétrique $u$, on note $p_\lambda$ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id})$, et on pose

$$f(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} f(\lambda)\, p_\lambda$$

Soit $v$ et $w$ deux endomorphismes symétriques sur un même espace euclidien $E$ et $t \in [0, 1]$. Montrer que

$$\mathrm{tr}\,(f((1-t)\,v + tw)) \leq (1-t)\,.\mathrm{tr}\, f(v) + t.\mathrm{tr}\, f(w)$$

**Indications**

1- Soit $s$ canoniquement associé à $S$ ; $A$ représente $s$ dans une base orthonormale $B = (e_1, e_2, ...e_n)$, et

$$a_{j,j} = \langle s(e_j), e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . x_k^2$$

avec

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|e_j\|^2 = 1$$

2- Soit $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ; $A = P.D.P^{-1} = P.D.P^T$.

$$a_{j,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_{j,k}^2$$

Donc

$$f(a_{j,j}) = f\left( \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_{j,k}^2 \right) \leq \sum_{k=1}^{n} p_{j,k}^2 . f(\lambda_k)$$

et en sommant :

$$\sum_{j=1}^{n} f(a_{j,j}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)$$

3- On choisit une base orthonormale $B = (e_1, e_2, ...e_n)$ telle que la matrice dans $B$ de $(1-t)\,v + tw$ soit diagonale :

$$M_B((1-t)\,v + tw) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

D'où

$$M_B(f((1-t)\,v + tw)) = \mathrm{diag}\,(f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n))$$

On note $V$ et $W$ les matrices dans $B$ de $v$ et $w$.

Pour tout $j$ :

$$f(\lambda_j) = f((1-t)\,v_{j,j} + tw_{j,j}) \leq (1-t)\, f(v_{j,j}) + tf(w_{j,j})$$

Il reste à sommer et à utiliser la question précédente.