Systèmes différentiels

1 Solution périodique

Soit $E = M_n(\mathbb{C})$, $M \in C^0(\mathbb{R}, E)$ périodique de période $T > 0$; soit S l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $x' = Mx$. Montrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \exists x \in S - \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}, x(t+T) = \lambda . x(t)$$

Indications

On utilise u endomorphisme de S défini ainsi :

$$u(x)(t) = x(t+T)$$

On vérifie que u est effectivement un endomorphisme de S ; on en déduit que u possède une valeur propre λ associée à un vecteur propre x.

2 Solution inversible

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, $A \in C^0(\mathbb{R}, E)$, et $M \in C^1(\mathbb{R}, E)$ solution sur $\mathbb{R}$ de $M' = AM$; on suppose que $M(t_0)$ est inversible pour une valeur t_0 ; montrer que $M(t)$ est inversible pour tout réel t.

Indications

Notons $X_1, ..., X_n$ les colonnes de M ; on sait que

$$X \to X(t_0)$$

est un isomorphisme de S sur $\mathbb{R}^n$.

Donc, par composition d'isomorphismes, pour tout réel t_1:

$$X(t_0) \to X(t_1)$$

définit un isomorphisme T de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Si $M(t_0)$ est inversible, alors $(X_1(t_0), ..., X_n(t_0))$ est libre ; son image par T est libre, donc $M(t_1)$ est inversible.

3 Solutions de signe positif

Soit $I = \mathbb{R}+$; soit A une fonction continue de I dans $M_n(\mathbb{R}+)$; soit (E) l'équation

$$X'(t) = -A(t) X(t)$$

On veut montrer l'existence d'une solution non nulle X dont toutes les coordonnées sont positives sur I.

1- Le démontrer dans le cas où $n = 1$.

2- Pour $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la solution telle que $X_k(k) = (1, ..., 1)^T = U_n$; dans le cas où A est constante, montrer que les coordonnées de X_k sont supérieures à 1 sur $I_k = [0, k]$.

3- Le démontrer dans le cas général.

4- En déduire l'existence d'une solution non nulle X dont toutes les coordonnées sont positives sur I.

Indications

1- Si $n = 1$, x se calcule et est de signe constant.

2- $X_k(t) = e^{-(t-k)A}.U_n = (I_n + B).U_n$ où B est une matrice somme de termes positifs si $t \in I_k$.

3- Supposons que l'une des coordonnées de X_k s'annule sur I_k ; soit $t_0 \in I_k$ tel que $X_k \geq 0$ sur $[t_0, k]$ et tel qu'une des coordonnées de X_k s'annule en t_0. La formule

$$X'(t) = -A(t) X(t)$$

montre que les coordonnées de X_k sont décroissantes sur $[t_0, k]$, contradiction ; donc les coordonnées de X_k ne s'annulent pas sur I_k ; donc $X_k \geq 0$ sur I_k.

La formule $X'(t) = -A(t) X(t)$ montre alors que les coordonnées de X_k sont décroissantes sur I_k, donc supérieures à 1 sur $I_k = [0, k]$.

4- Soit Y_k le vecteur unitaire associé à X_k ; on applique le théorème de Bolzano-Weierstrass à (Y_k)...

4 Convergence de la méthode d'Euler

On note $I = [0, 1]$, et $E = (\mathbb{R}^n, \|\|_2)$. Soit $v \in C^0(E, E)$ qu'on suppose $\rho-$lipschitzienne.

Soit $X \in C^1(I, E)$ solution sur I de

$$X'(t) = v(X(t))$$

On fixe un entier $n \geq 1$; on note

$$x_k = X\left(\frac{k}{n}\right)$$

On note

$$y_k = Y\left(\frac{k}{n}\right)$$

le résultat obtenu en appliquant la méthode d'Euler, avec $y_0 = x_0 = X(0)$.

On note

$$\delta_k = \|x_k - y_k\|_2$$

1- Montrer que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \delta_{k+1} \leq \left(1 + \frac{\rho}{n}\right) \delta_k + \frac{\rho}{n^2} \|X'\|_\infty$$

2- En déduire une majoration de δ_k.

3- Etudier la convergence de la méthode quand $n \to +\infty$.

Indications

1-

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{n} v(y_k)$$

Donc

$$y_{k+1} - x_{k+1} = (y_k - x_k) + \frac{1}{n}(v(y_k) - v(x_k)) - R_k$$

avec

$$R_k = x_{k+1} - x_k - \frac{1}{n} v(x_k)$$

D'où

$$R_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} X'(t) - X'\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v(X(t)) - v\left(X\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}t$$

2- On étudie les suites (u_k) vérifiant

$$u_0 = 0, \ a \neq 1, \ u_{k+1} = a.u_k + b$$

On trouve

$$\forall \geq 0, \ u_k = \frac{b}{a-1}\left(a^k - 1\right)$$

Avec $a = 1 + \frac{\rho}{n}$ et $b = \frac{\rho}{n^2} \|X'\|_\infty$, on montre que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ 0 \leq \delta_k \leq \frac{\|X'\|_\infty}{n} . \left(\left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^k - 1\right)$$

3- Pour $k = n$:

$$0 \leq \delta_n \leq \frac{\|X'\|_\infty}{n} . \left(\left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^n - 1\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$