Calcul différentiel

1 Soit f de classe C^1 de ℝ² dans ℝ ; déterminer $\dfrac{d}{dx} f(x, 2x)$.

2 On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$, et $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{|x|+|y|}$ si $(x,y) \neq (0,0)$; f est-elle C^o, C^1 ?

3a On définit f sur ℝ² par $f(x,y) = x.y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Prolonger f par continuité en 0.

Montrer que f est C^o sur ℝ², C^1 sur ℝ²−{(0,0)}. Est-elle différentiable en 0 ? C^1 sur ℝ² ?

b Mêmes questions avec $f(x,y) = (x^2+y^2).\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4 Soit f définie sur ℝ² par $f(x,y) = x(1-y)$ si $x \le y$, $y(1-x)$ si $x \ge y$. Montrer que f est continue sur ℝ², C^1 sur ℝ²\Δ où Δ est une droite. Soit $K = [0, 1]^2$. Quel est le minimum de f sur K ? Montrer que f admet un maximum sur K. Le déterminer, et montrer qu'il est atteint en un point unique.

5 Etudier continuité et différentiabilité de $f(x,y) = \max(x,y)$, $g(x,y) = \max(x^2,y^2)$ sur ℝ².

6 Soit $f_1,..., f_n \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Soit $f = \min(f_1,..., f_n)$. Montrer que f est continue. CNS pour que df_a existe ?

7 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^1 telle que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)| \le k < 1$; montrer que $F : (x,y) \to (x + f(y), y + f(x))$ est de classe C^1 et bijective de ℝ² sur ℝ².

8 Soit $f : (x,y) \to (\text{sh}\, x + \sin y, \text{sh}\, y + \sin x)$; est-ce une bijection, un homéomorphisme de ℝ² sur ℝ² ?

9 Soit $f(x,y) = (x+y, xy)$, et $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / |y| < |x| \}$; trouver $B = f(A)$ et montrer que f est de classe C^1 et bijective. A et B sont-ils convexes, CPA ?

10 Soit $I =]0,+\infty[$ et $\Phi : I^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (u,v) = (x, \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x})$; montrer que Φ est un bijective de I^2 sur un ouvert U de ℝ² à préciser (et à dessiner). Résoudre sur I^2 : $x^2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y^2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$.

11 Soit $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1 \}$; soit $f : (x,y) \to \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}, y - \dfrac{y}{x^2+y^2})$; déterminer $f(\Omega)$ et montrer que f est de classe C^1 et bijective de Ω sur $f(\Omega)$.

12 Soit D le disque unité fermé de ℝ². Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$; montrer que f admet un maximum et un minimum sur D ; les déterminer après avoir cherché les points critiques de f.

13 $E = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x.e^y + y.e^x$; chercher les points critiques ; sont-ils des extremums ?

14 Chercher les fonctions harmoniques f de ℝ² dans ℝ de la forme $f(x,y) = u(x)v(y)$.
Si v est non nulle, on montrera que u vérifie une EDL de la forme $u'' + Au = 0$.

15 Soit E un EVE, et $I(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ (inversion en géométrie) ; montrer que I est de classe C^∞ sur $U = E - \{0\}$ et calculer dI_x. Est-ce un automorphisme ?

16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2 et $g(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Montrer sans efforts que g possède un prolongement C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

17 Montrer que toute solution de $xD_1 f + yD_2 f = \sin(x^2 + y^2)$ C^1 sur $\mathbb{R}^2$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

18 Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont toutes les applications partielles sont continues ; montrer qu'il existe une suite de fonctions continues qui converge simplement vers f.

19 Soit f de classe C^1 de $E = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; pour $h \in E$, et t réel, on note $f_h(t) = f(th)$.
On suppose que $(0,0)$ est un minimum local pour f. Montrer que pour tout h, 0 est un minimum local pour f_h.
Si pour tout h, 0 est un minimum local pour f_h, $(0,0)$ est-il un minimum local pour f ?

20 Soit f fonction de $E = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; pour $h \in E$, on note $f_h(t) = f(th)$.
On suppose que $df(0) = 0$. Montrer que pour tout h, $f_h'(0) = 0$.
Si pour tout h, $f_h'(0) = 0$, est-ce-que $df(0) = 0$? Est-ce-que $df(0)$ existe ?

21 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; on suppose que $D_1 f$ existe en $(0,0)$, et que $D_2 f$ est continue au voisinage de $(0,0)$.
Montrer que f est différentiable au point $(0,0)$.

22 Soit $X_0 \in E = \mathbb{R}^3$. Déterminer les $f : E \to \mathbb{R}$ C^1 telles que : $\forall X \in E$, $\operatorname{grad} f(X) = f(X)\, X_0$.

23 Soit $E = \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, et $g(x) = Ax$; montrer qu'il existe $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ tel que $g = \operatorname{grad} f$ SSI A est symétrique ; dans ce cas, déterminer f. On pourra utiliser $f_h(t) = f(th)$.

24 Soit $U \subset S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices définies positives. U est-il un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$, de $M_n(\mathbb{R})$?
Montrer que $\phi : A \to A^2$ est de classe C^1 et bijective de U sur U.

25 On définit f sur $E = M_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = (tr\, M, tr\, M^2, \dots, tr\, M^n)$. Montrer que f est différentiable, et calculer df_M. Montrer que $\operatorname{rg} df_M = d°\, \mu_M$ (polynôme minimal de M).

26 Soit $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $f : P \to \int_0^1 h(P(x))dx$.
Montrer que f est C^1 sur E et trouver df dans le cas où h' est bornée, puis dans le cas général.

27 Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \ \|_2$; soit $\phi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que ϕ'' soit bornée sur $\mathbb{R}$;
soit $T(f) = \int_0^1 \phi \circ f$; montrer que T est différentiable en tout point de E.

28 Dans un triangle, chercher le point M tel que le produit des distances de M aux trois côtés du triangle soit maximal.

29 A, B, C décrivent une ellipse. Etudier les extremums de l'aire du triangle (A, B, C).