Équations différentielles linéaires

Contents

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé de dimension finie n.

1 Généralités

1.1 Équation différentielle linéaire

$$x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$$

ou, en résumé, $x' = a(t)(x) + b(t)$; a est une application continue de I dans $L(E)$ et b une application continue de I dans E.

1.2 Forme matricielle

Systèmes différentiels linéaires :

$$X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$$

Ici A et B sont des applications continues de I dans ?

Réponse

$A(t) \in M_n(\mathbb{R})$; $B(t) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1.3 Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire

$x'(t) = a(t)\,x(t)$, ou $X'(t) = A(t)\,X(t)$

Exemple

$$\begin{cases} y'(t) = -z(t) \\ z'(t) = y(t) \end{cases}$$

Ici, $X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$; $X'(t) = A(t)\,X(t)$ avec $A = ?$

Si $X(t)$ décrit une trajectoire, que dire du vecteur vitesse ?

Réponses

$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Le vecteur vitesse est normal à $X(t)$.

1.4 Principe de superposition

Dans le cas où B est une somme

$$B = B_1 + ... + B_p$$

pour obtenir une solution X de $X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$, il suffit d'ajouter des solutions $X_1, X_2...$ des équations

$$X'(t) = A(t)\,X(t) + B_j(t)$$

Remarque

Il s'agit d'une équation linéaire $u(x) = b$, $u \in L(E_1, E_2)$.

Ici, $E_1, E_2, u = ?$

Réponse

$E_1 = C^1(I, E)$ et $E_2 = C^0(I, E)$.

$$u(X) = X' - AX$$

1.5 Problème de Cauchy

1.5.1 Définition

$$(1)\ \begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

1.5.2 Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

Le problème précédent est équivalent à l'équation intégrale :

$$(2)\ \ X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(u)\,X(u) + B(u)\,\mathrm{d}u$$

Plus précisément :

X est une solution de classe C^1 sur I de (1) si et seulement si X est une solution continue sur I de (2).

1.6 Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire

1.6.1 Equation scalaire linéaire d'ordre n $(n \geq 1)$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t).y^{(n-1)}(t) + ... + a_0(t).y(t) = b(t)\ \ \ (1)$$

Les a_j et b sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'inconnue y est de classe C^n sur I.

1.6.2 Représentation par un système différentiel linéaire

Supposons y solution de (1) ; soit $X = \left(y, y', ...y^{(n-1)}\right)^T$; alors, X est solution de

$$X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$$

avec $A = ?$ $B = ?$

Réponse pour $n = 4$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) \end{bmatrix},\ B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

On reconnaît la transposée d'une matrice compagnon.

1.6.3 Réciproque

Si $X = (x_0, x_1, ...x_{n-1})^T$ est solution sur I de

$$X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$$

alors $y = x_0$ est solution sur I de (1).

1.6.4 Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire

Ici, la condition initiale $X(t_0) = X_0$ s'écrit

$$\left(y(t_0) = u_0,\ y'(t_0) = u_1,\ y''(t_0) = u_2, ..., y^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}\right)$$

2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

2.1 Théorème de Cauchy linéaire

Démonstration non exigible

Il y a existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Cas des équations scalaires d'ordre n

Analogue : il y a existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{c} y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t).y^{(n-1)}(t)+...+a_0(t).y(t)=b(t) \\ \left(y(t_0)=u_0,\ y'(t_0)=u_1,\ y''(t_0)=u_2,...,y^{(n-1)}(t_0)=u_{n-1}\right) \end{array}\right.$$

Attention

C'est le même t_0 pour $y, y', y'', ...$ Contre-exemple :

$$\left\{\begin{array}{c} y''(t)+y(t)=0 \\ \left(y(0)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\right) \end{array}\right.$$

Attention

Le coefficient de $y^{(n)}$ est 1. Ou une fonction a_n continue et qui ne s'annule pas sur I.

2.2 Cas des équations homogènes

Théorème

Pour l'équation homogène $X'(t)=A(t)X(t)$, l'ensemble S_H des solutions est un sous-espace vectoriel de E^I.

Théorème

Pour tout t_0 dans I, l'application

$$\begin{array}{ccc} S_H & \to & E \\ x & \to & x(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel de S_H sur E. En particulier, S_H est de dimension n.

Théorème : cas des équations scalaires d'ordre n

Pour tout t_0 dans I, l'application

$$\begin{array}{ccc} S_H & \to & K^n \\ y & \to & \left(y(t_0),...,y^{(n-1)}(t_0)\right) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel de S_H sur K^n. En particulier, S_H est de dimension n.

2.3 Retour au cas général

L'ensemble des solutions est un sous-espace affine de E^I.

2.4 Une variante

$$\left\{\begin{array}{c} M'(t)=A(t)M(t)+B(t) \\ M(t_0)=C \end{array}\right.$$

Ici, $A(t)$ est toujours carrée de taille n ; M_0, $M(t)$ et $B(t)$ ne sont plus des colonnes, mais des matrices, toujours à n lignes, mais à q colonnes.

Dans ce cas aussi il y a une solution unique ; le système est équivalent à q systèmes

$$\left\{\begin{array}{c} M_j'(t)=A(t)M_j(t)+B_j(t) \\ M_j(t_0)=C_j \end{array}\right.$$

2.5 Ebauche de démonstration

On suppose que I est un segment : $I = [a, b]$; on fixe $t_0 \in I$ et $\alpha \in E$.

Soit F l'ensemble des fonctions continues de I dans $E = \mathbb{R}^n$. On utilisera $\|\|_\infty$ dans E et dans F.

$$F = \left(C^0\left([a, b], E\right), \|\|_\infty\right)$$

On note T l'application qui à $X \in F$ associe $Y \in F$ défini par

$$Y(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} A(u) X(u) + B(u) \, \mathrm{d}u$$

On cherche à montrer que T possède un unique point fixe.

Pour simplifier les calculs, on choisit dans $M_n(\mathbb{R})$ une norme telle que :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, \|M.X\| \leq \|M\| . \|X\|$$

Par exemple, $n. \|\|_\infty$.

On note $C = \max\limits_I \|A\|$.

T est lipschitzienne

T est lipschitzienne de rapport $k = \int_I \|A(u)\| \, \mathrm{d}u$; problème, T peut ne pas être contractante.

2.5.1 Unicité

Soit X_0 et Y_0 deux éléments de F ; on définit deux suites (X_k) et (Y_k) par $X_{k+1} = T(X_k)$ et $Y_{k+1} = T(Y_k)$; on montre par récurrence sur k que

$$\forall k \geq 0, \forall t \in I, \|Y_k(t) - X_k(t)\| \leq C^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} \|Y_0 - X_0\|_\infty$$

Que conclure si X_0 et Y_0 sont deux points fixes de T ?

2.5.2 Existence

On définit une suite par $X_0 \in F$ quelconque, et $X_{k+1} = T(X_k)$.

On étudie la différence $X_{k+1} - X_k$:

$$\forall k \geq 0, \forall t \in I, \|X_{k+1}(t) - X_k(t)\| \leq C^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} \|X_1 - X_0\|_\infty$$

Qu'en déduire pour la suite (X_k) ?

Réponse

La série $\sum X_{k+1} - X_k$ converge normalement sur I ; donc la suite (X_k) converge uniformément sur I.

2.6 La méthode d'Euler

2.6.1 Principe

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) X(t) + B(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Fixons $h > 0$; $X(h) \approx X_0 + h.T_0 = X_1$; $X(2h) \approx X_1 + h.T_1 = X_2$.

$T_0 =$? $T_1 =$?

Réponse

$T_0 = A(0) X_0 + B(0)$; $T_1 = A(h) X_1 + B(h)$.

2.6.2 Un exemple

$\left\{ \begin{array}{c} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{array} \right. \; ; y_n \; ?$

Réponse

$y_n = (1+h)^n$; pour x fixé, atteint en n étapes : $x = nh$,

$$y(x) \approx y_n = (1+h)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Conclusion ?

3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

3.1 Rappels

3.1.1 Applications bilinéaires

Si E_1, E_2 et F sont des espaces normés de dimensions finies, et B une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F, alors :

$$\exists c > 0, \forall x, y, \|B(x,y)\| \leq c. \|x\| . \|y\|$$

3.1.2 Produit matriciel

Soit $E = M_n(K)$; d'après ce qui précède :

$$\exists c > 0, \forall X, Y \in E, \; \|X.Y\| \leq c. \|X\| . \|Y\|$$

Exemple : pour $\|\|_\infty$, $c =$?

Réponse

$c = n$ convient.

3.1.3 Complément : $c = 1$

De plus, on peut choisir une norme dans E pour que $c = 1$. Par exemple, on choisit une norme quelconque dans $M_{n,1}(K)$, et dans E :

$$\|M\| = \sup \left\{ \frac{\|M.X\|}{\|X\|} \,/\, X \in M_{n,1}(K) - \{0\} \right\}$$

Cette norme sur E vérifie aussi :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, \|M.X\| \leq \|M\| . \|X\|$$

Autre exemple plus simple

$M \to \|M\| = n \|M\|_\infty$ est une norme sur $E = M_n(K)$ qui vérifie

$$\forall X, Y \in E, \; \|X.Y\| \leq \|X\| . \|Y\|$$

3.1.4 Des exemples d'applications continues

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; soit B une base de E ; l'application

$$u \to M_B(u)$$

est continue de $L(E)$ dans $M_n(\mathbb{C})$, ainsi que sa réciproque.

Soit A, $B \in M_n(\mathbb{C})$; les applications

$$M \to A.M$$

$$M \to M.B$$

$$M \to A.M.B$$

sont continues de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$.

3.2 Exponentielle de matrices

3.2.1 Définition

Soit E un EVN de dimension finie ; soit $a \in L(E)$; on pose

$$\exp(a) = e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

Justification

La série converge absolument d'après :

$$\left\| \frac{a^k}{k!} \right\| \leq \frac{c^{k-1}.\left\|a\right\|^k}{k!}$$

et la règle de d'Alembert.

3.2.2 Cas d'une matrice

Pour A matrice carrée : $\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

3.2.3 Si $A = M_B(a)$

Soit B une base de E ; soit $a \in L(E)$; soit $A = M_B(a)$; alors

$$\exp(A) = M_B(\exp(a))$$

Démonstration

On note $s_k(a) = \sum_{j=0}^{k} \frac{a^j}{j!} \cdots$

3.2.4 $\exp\left(P^{-1}.A.P\right)$

$\exp\left(P^{-1}.A.P\right) = P^{-1}.\exp(A).P$

Démonstration

A nouveau à l'aide de $s_k(A) = \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!}$.

3.2.5 $A.e^A = e^A.A$

3.3 Continuité de $\exp$

Théorème

$\exp$ est continue sur $L(E)$.

Démonstration

On vérifie que la série converge normalement sur toute partie bornée :

$$\forall a \in \overline{B(0,R)}, \left\| \frac{a^k}{k!} \right\| \leq \frac{c^{k-1}.R^k}{k!}$$

indépendant de a, et terme général d'une série de réels positifs convergente.

3.4 Théorème : $\exp(tA)$

Notons $e_A : t \to \exp(tA)$; e_A est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$;

$$e'_A(t) = A.e_A(t) = e_A(t).A$$

3.5 Spectre

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Si le spectre de A est $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors le spectre de $\exp(A)$ est $\left(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}\right)$.
$\det\left(e^A\right)$?

Réponse

$\det\left(e^A\right) = \exp(\mathrm{tr}A)$. En particulier, e^A est toujours inversible.

3.6 Exercice

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$; montrer que $e^A \in \mathbb{C}[A]$.

3.6.1 Cas où A est nilpotente

3.6.2 Cas où A est diagonale

3.6.3 Cas où A est diagonalisable

3.6.4 Cas général

$\mathbb{C}[A]$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc fermé dans $M_n(\mathbb{C})$; il contient les

$$s_k(A) = \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!}$$

donc il contient la limite.

3.7 Exp est surjective de $M_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$

Exercice

Soit B inversible ; on se ramène au cas où $B = I_n + N$ avec N nilpotente (comment ?).

On pose alors

$$P = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$$

et $A = P(N)$; $e^A = \exp P(N) = Q(P(N))$, avec $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$; pourquoi ?
Il reste à étudier $Q \circ P$; on montre que

$$Q \circ P = 1 + X + X^{n+1} R(X)$$

4 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

4.1 Théorème

On étudie ici :

$$\left\{ \begin{array}{c} X'(t) = A.X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

Dans le cas où $t_0 = 0$, on dispose d'une expression pour la solution unique sur $\mathbb{R}$:

$$X(t) = e^{tA}.X_0$$

Dans le cas général ? Résultat analogue pour $\left\{ \begin{array}{c} x'(t) = a(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$.

Réponse

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}.X_0$$

4.2 Théorème

Soit a, b deux endomorphismes qui commutent ; alors

$$\exp(a+b) = \exp(a) \circ \exp(b)$$

Analogue pour les matrices carrées.

4.2.1 Démonstration

Soit $f(t) = e^{t(A+B)}$ et $g(t) = e^{tA}.e^{tB}$; on calcule leurs dérivées ; f et g sont deux solutions de

$$\left\{ \begin{array}{c} X'(t) = (A+B).X(t) \\ X(0) = I_n \end{array} \right.$$

4.2.2 Cas particulier

Si $B = -A$: on constate que $\exp(-A)$ est l'inverse de $\exp(A)$.

4.3 Le cas de la dimension 2

4.3.1 Exemple 1

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(t) = -a.z(t) \\ z'(t) = a.y(t) \end{array} \right.$$

On en déduit $y'' + a^2 y = 0$, et $z'' + a^2 z = 0$; d'où

$$y(t) = \alpha.\cos at + \beta.\sin at$$

Avec $\alpha = ?$ $\beta = ?$

Réponse

$\alpha = y(0)$; $\beta = -z(0)$.

Matriciellement $\left\{ \begin{array}{c} X'(t) = A.X(t) \\ X(0) = X_0 \end{array} \right.$, avec $A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$.

$$X(t) = \begin{bmatrix} y(0)\cos at - z(0)\sin at \\ y(0)\sin at + z(0)\cos at \end{bmatrix} = \exp(tA).X(0)$$

Conclusion : $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos at & -\sin at \\ \sin at & \cos at \end{bmatrix}$.

Autre méthode pour calculer e^{tA} ?

Calculer A^2, puis A^{2n}...

4.3.2 Exemple 2

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = 2y + z \\ z' = 3y + 4z \end{array} \right.$$

donc

$$X' = AX$$

avec $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. On trouve une base de vecteurs propres :

Pour $\lambda = 1$: $U = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, pour $\lambda = 5$: $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

On cherche $X(t)$ sous la forme

$$X(t) = c_1(t)U + c_2(t)V$$

L'équation s'écrit :

$$X'(t) = c_1'(t)U + c_2'(t)V = c_1(t)U + 5c_2(t)V$$

D'où $c_1' = c_1, c_2' = 5c_2$; finalement :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha.e^t + \beta.e^{5t} \\ y(t) = -\alpha.e^t + 3\beta.e^{5t} \end{cases}$$

4.3.3 Réduction des matrices de $M_2(\mathbb{R})$

Exercice

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que M est semblable dans $M_2(\mathbb{R})$ à une matrice d'une des trois formes suivantes :

- $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec $b \neq 0$.

Démonstration

Dans le cas où M a une valeur propre $\lambda = a + ib$, avec $b \neq 0$, on écrit $MZ = \lambda Z$ avec $Z = X + iY \neq 0$.

On obtient

$$\begin{cases} MX = aX - bY \\ MY = bX + aY \end{cases}$$

Il reste à montrer que (X, Y) est libre :

- $(Z, \overline{Z})$ est libre car Z et $\overline{Z}$ sont vecteurs propres de M associés à deux valeurs propres distinctes λ et $\overline{\lambda}$.
- Z et $\overline{Z}$ sont combinaisons $\mathbb{C}-$linéaires de X et Y, donc (X, Y) est $\mathbb{C}-$libre.
- (X, Y) est $\mathbb{C}-$libre, donc $\mathbb{R}-$libre.

Une autre méthode

Il est facile de montrer que M est semblable à $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{C})$; on peut ensuite montrer que deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ sont en fait semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

4.3.4 Application

Soit a un endomorphisme ; pour étudier $x'(t) = a(x(t))$, on calcule dans une base B adaptée.

4.3.5 Cas 1

$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$; $\exp(tA) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}$. Tracé ?

4.3.6 Cas 2

$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$; $\exp(tA) = e^{\lambda t}.\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tracé ?

4.3.7 Cas 3

$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$; $\exp(tA) = e^{at}.\begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$. Tracé ?

4.4 Exercice : étude asymptotique

On suppose que A possède une seule valeur propre : $A = \lambda I_n + N$.

$$e^{tA} = e^{\lambda t}.e^{tN}$$

Que dire de e^{tN} ?

C'est une fonction polynomiale.

4.4.1 Cas où Re$\lambda < 0$.

Dans ce cas :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0$$

4.4.2 Cas où Re$\lambda = 0$.

Dans ce cas :

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| e^{tA} \right\| = +\infty$$

sauf si $N = 0$.

4.4.3 Si A possède plusieurs valeurs propres ?

A est semblable à une matrice diagonale par blocs...

4.5 Morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$

Exercices

4.5.1 Endomorphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$

Les seuls endomorphismes de groupes continus f de $(\mathbb{R}, +)$ sont les

$$f_a : t \to at$$

où a décrit $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit F une primitive de f. De

$$(H) : \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

on déduit, en intégrant sur $[0, 1]$ par rapport à y :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+1) - F(x) = f(x) + F(1) - F(0)$$

Ceci montre que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On revient à (H) ; en dérivant par rapport à y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f'(x+y) = f'(y)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(0)$$

Conclusion ?

4.5.2 Morphismes de groupes C^0 de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$

Les seuls morphismes de groupes continus f de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ sont les applications

$$f_A : t \to \exp(tA)$$

où A décrit $M_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

On va d'abord montrer que f est nécessairement de classe C^1 ; soit $a > 0$; on part de

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) f(y)$$

On fixe x et on intègre par rapport à y sur $[0, a]$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+a) - F(x) = f(x) . (F(a) - F(0))$$

Comment montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Il suffit de montrer l'existence de a tel que $F(a) - F(0)$ soit inversible ; pour cela, on utilise

$$\lim_{a \to 0} \frac{F(a) - F(0)}{a} = f(0) = I_n$$

On peut ensuite dériver par rapport à x :

$$f'(x+y) = f'(x) f(y)$$

Conclusion ?

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f'(0) f(t)$$

D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \exp(tA) . f(0) = \exp(tA)$$

avec $A = f'(0) \in M_n(\mathbb{R})$.

5 Equations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} . y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 . y(t) = 0 \quad (1)$$

Les a_k sont des complexes, et $n \geq 1$.

Notations

$E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. $D \in L(E)$ est l'endomorphisme de dérivation :

$$D : \begin{array}{l} E \to E \\ y \to y' \end{array}$$

$$e_\lambda : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \to e^{\lambda t} \end{array}$$

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k . X^k$$

On sait qu'on peut ramener l'étude de (1) à celle d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants. On va voir une autre approche.

Soit S l'ensemble des solutions de (1) :

$$S = \ker P(D)$$

5.1 Utilisation du théorème de décomposition des noyaux

P est scindé dans $\mathbb{C}$:

$$P = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_j}$$

Donc

$$S = \bigoplus_{j=1}^{r} \ker (D - \lambda_j . \mathrm{Id})^{m_j}$$

5.2 Cas où P est scindé à racines simples

On est ramené à déterminer $E_\lambda = \ker(D - \lambda.\mathrm{Id})$. Evidemment :

$$E_\lambda = \mathrm{Vect}(e_\lambda)$$

Donc une base de S est

$$(e_{\lambda_j})_{1 \leq j \leq n}$$

Ce qui veut dire que les solutions s'écrivent

$$y : t \to \sum_{j=1}^{n} c_j . e^{\lambda_j t}$$

où les $c_j \in \mathbb{C}$ sont des constantes.

5.3 Cas général

On est ramené à déterminer

$$F = \ker(D - \lambda.\mathrm{Id})^m$$

Lemme

$$\forall z \in E, (D - \lambda.\mathrm{Id})(z.e_\lambda) = z'.e_\lambda$$

Application

On cherche les éléments de F sous la forme $y = z.e_\lambda$.

$$\forall z \in E, (D - \lambda.\mathrm{Id})^m (z.e_\lambda) = 0 \Longleftrightarrow z^{(m)}.e_\lambda = 0$$

Conclusion : dans ce cas, une base de F est

$$\left(e_\lambda, X.e_\lambda, ..., X^{m-1}.e_\lambda\right)$$

6 Méthode de variation des constantes

6.1 Introduction

On cherche à résoudre l'équation

$$(E) \ : \ X'(t) = A(t) X(t) + B(t)$$

dans le cas où on a résolu l'équation homogène.

On suppose donc connue une base de S_H : $(X_1, ..., X_n)$; une telle base est quelquefois appelée système fondamental de solutions ; notons

$$R(t) = (X_1(t), ..., X_n(t))$$

(la résolvante).

Une solution X de S_H s'écrit

$$X = c_1 X_1 + ... c_n X_n$$

On cherche les solutions de (E) sous la forme

$$X(t) = c_1(t) X_1(t) + ... c_n(t) X_n(t)$$

soit $X(t) = R(t) C(t)$, avec $C(t) = (c_1(t), ..., c_n(t))^T$.

6.2 Justification

Est-on sûr que toute solution X peut se mettre sous cette forme ?

Réponse

Oui, car $R(t)$ étant inversible, on peut poser

$$C(t) = R^{-1}(t)\, X(t)$$

et C ainsi définie est de classe C^1.

6.3 Calcul

On obtient $RC' = B$, d'où $X(t) = R(t) . \left(C_0 + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(s)\, B(s)\, \mathrm{d}s\right)$

6.4 Cas des systèmes à coefficients constants

$$(E) \;:\; X'(t) = A.X(t) + B(t)$$

Dans ce cas, $R(t) = e^{tA}$; d'où

$$X(t) = e^{tA}. \left(C_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s)\, \mathrm{d}s\right)$$

7 Équations différentielles scalaires du second ordre

7.1 L'équation

$$(E) : \; y''(t) + a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = f(t)$$

a, b, f sont continues sur I ; le système différentiel équivalent :

$$X'(t) = M(t)\, X(t) + F(t)$$

avec $X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$, $M(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix}$, $F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$.

7.2 La méthode de variation des constantes

On suppose connues deux solutions indépendantes de l'équation homogène, y_1 et y_2 ; on cherche X sous la forme $X = RC$; d'où $RC' = F$; ici,

$$R(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}$$

d'où la méthode **à retenir** :

On cherche y sous la forme

$$y = c_1.y_1 + c_2.y_2$$

avec

$$\begin{cases} c_1'.y_1 + c_2'.y_2 = 0 \\ c_1'.y_1' + c_2'.y_2' = f \end{cases}$$

Le déterminant de ce système,

$$w = y_1.y_2' - y_1'.y_2$$

est appelé wronskien ; il ne s'annule pas sur I.

Remarque

Ces formules ne s'appliquent que si le coefficient de y'' vaut 1 ; sinon, il faut s'y ramener.

7.3 Exemple 1

Résoudre

$$\left\{ y''(x) - y(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}x},\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \right\}$$

Réponse

$$y(x) = x.\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x.\ln(\mathrm{ch}x)$$

7.4 Exemple 2

Soit f continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; soit $(E) : y'' - y = f$; montrer que (E) possède une unique solution bornée.

Réponse

$$-\frac{e^x}{2}\int_x^{+\infty} e^{-u} f(u)\,\mathrm{d}u - \frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x} e^u f(u)\,\mathrm{d}u$$

7.5 Wronskien

7.5.1 Définition

Ici, l'équation est homogène

$$(E) :\ y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = 0$$

Soit y_1 et y_2 deux solutions ; on appelle wronskien :

$$w = y_1.y_2' - y_1'.y_2$$

Dans le cas où (y_1, y_2) est libre, c'est le déterminant de la résolvante.

C'est le déterminant du système à résoudre quand on utilise la méthode de variation des constantes.

7.5.2 Calcul

$$w' = -a.w$$

d'où

$$w(t) = w(t_0).\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

7.5.3 Les zéros de w

Si (y_1, y_2) est liée, w est nul ; sinon, w ne s'annule pas.

7.5.4 Cas où a est nul

Dans le cas de l'équation

$$y''(t) + q(t).y(t) = 0$$

le wronskien est constant.

7.5.5 Cas où on connaît une solution

Si on connaît une solution y_1,

$$w = y_1.y_2' - y_1'.y_2$$

est une EDL d'ordre 1 d'inconnue y_2 qu'on peut en théorie utiliser pour résoudre complètement l'équation.

7.6 Exercice 1

$$(E):\ y''(t)+a(t)\,y'(t)+b(t)\,y(t)=0$$

Montrer que si y a une infinité de zéros sur un segment $J\subset I$, alors $y=0$.

Démonstration

Supposons l'existence dans J d'une suite (s_n) de zéros de y distincts.

J étant compact, (s_n) possède une suite extraite $(t_n)=\left(s_{\varphi(n)}\right)$ qui converge vers un élément c de J. y étant continue :

$$y(c)=0$$

De plus :

$$\forall n\geq 0,\ \frac{y(t_n)-y(c)}{t_n-c}=0$$

D'où

$$y'(c)=0$$

Avec le théorème de Cauchy linéaire : $y=0$.

7.7 Exercice 2

$(E):\ y''(t)+a(t)\,y'(t)+b(t)\,y(t)=0$. Montrer que si deux solutions u et v ont un zéro commun t_0, (u,v) est liée.

Réponse

On peut utiliser le wronskien, ou appliquer le théorème du rang à

$$y\to y(t_0)$$

7.8 Exercice 3

$(E):\ y''(t)+a(t)\,y'(t)+b(t)\,y(t)=0$. Désormais, $K=\mathbb{R}$. On suppose (u,v) libre.

Montrer qu'entre deux zéros de u consécutifs, v a exactement un zéro. (Utiliser w).

7.9 Exercice 4

On suppose $u''+p.u=0$, $v''+q.v=0$, avec p et q continues sur I, et $p\leq q$; soit $a<b$ deux zéros consécutifs de u ; alors, v a au moins un zéro sur $]a,b]$.

Démonstration

u ne s'annule pas sur $]a,b[$; étant continue, elle est de signe constant, par exemple $u>0$ sur $]a,b[$.

On montre alors que

$$u'(a)>0,\ u'(b)<0$$

Soit $w=uv'-u'v$; on trouve que

$$w'=(p-q)\,uv$$

Supposons par l'absurde que $v>0$ sur $]a,b]$; alors :

$w'\leq 0$ sur $[a,b]$
$w(a)\leq 0$
$w(b)>0$

Contradiction.

7.10 Exercice 5

On suppose $y'' + p.y = 0$, avec p continue sur $\mathbb{R}^+$, et $\lim\limits_{+\infty} p = 1$.

Si y n'est pas nulle, montrer qu'elle a une suite de zéros (t_n) vérifiant

$$\lim_n t_{n+1} - t_n = \pi$$

Démonstration, 1e partie

Fixons $\varepsilon > 0$; fixons $c > 0$ tel que :

$$\forall t \geq c, p(t) \leq q = \omega^2 = \left(\frac{\pi}{\pi - \varepsilon}\right)^2$$

Soit $a < b$ deux zéros consécutifs de $u = y$ dans $J = [c, +\infty[$, s'ils existent. On peut appliquer l'exercice précédent. On choisit

$$v(t) = \sin\omega(t - a)$$

On sait que v s'annule sur $]a, b]$, d'où

$$b - a \geq \frac{\pi}{\omega} = \pi - \varepsilon$$

Démonstration, 2e partie

Fixons $\varepsilon > 0$; fixons $c > 0$ tel que :

$$\forall t \geq c, p(t) \geq \omega^2 = \left(\frac{\pi}{\pi + \varepsilon}\right)^2 = q$$

Soit a un zéro de $u = y$ dans $J = [c, +\infty[$. On peut appliquer l'exercice précédent. Ici, les rôles de p et q sont inversés.

On choisit

$$v(t) = \sin\omega(t - a)$$

et b le zéro suivant de v :

$$b - a = \frac{\pi}{\omega} = \pi + \varepsilon$$

On sait que u s'annule sur $]a, b]$...

7.11 Exercice 6

$(E) : y'' + p.y = 0$. On suppose p continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que les solutions ne sont pas toutes bornées.

7.12 Exercice 7

$(E) : y'' + p.y = 0$. On suppose p continue, positive, et non intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que toute solution a une infinité de zéros.

Indications

Supposons par l'absurde l'existence d'une solution y n'ayant qu'un nombre fini de zéros.

Alors il existe $a > 0$ tel que sur $J = [a, +\infty[$, y ne change pas de signe. Par exemple :

$$\forall x \in J = [a, +\infty[\,,\ y(x) < 0$$

Or $y'' = -py$, et $p \geq 0$, donc

$$\forall x \in J = [a, +\infty[\,,\ y''(x) \geq 0$$

Autrement dit y est convexe sur J.

On sait que dans ce cas la courbe est au dessus de toute tangente :

$$\forall b \in J, \forall t \in J,\ y(t) \geq y(b) + (t-b)\, y'(b)$$

Donc :

$$\forall b \in J, \forall t \in J,\ y(b) + (t-b)\, y'(b) \leq y(t) \leq 0$$

Pour b fixé, avec $t \to +\infty$, on constate que $y'(b) \leq 0$:

y est donc décroissante sur J. Donc

$$\forall t \in J,\ y(t) \leq y(a) < 0$$

Donc sur J :

$$y'' = -p.y \geq -y(a)\,.p$$

Or p n'est pas intégrable, donc y'' n'est pas intégrable, donc :

$$\lim_{+\infty} y' = +\infty$$

et on est enfin arrivé à une contradiction.

7.13 Exercice 8

$(E) : y'' + p.y = 0$. On suppose p continue et négative sur I.

Montrer que toute solution non nulle a au plus un zéro.

Par l'absurde

Avec $z = y^2$

7.14 Exercice 9

$(E) : y'' + p.y = 0$. On suppose p continue et négative sur I ; soit $a < b$ dans I ; soit α, β deux réels.

Montrer qu'il existe une solution unique y telle que $y(a) = \alpha$ et $y(b) = \beta$.

7.15 Exercice 10

$$(E) : y'' + (1+q)\,.y = 0$$

On suppose q continue et intégrable sur $I = \mathbb{R}^+$.

Soit $y \in S \setminus \{0\}$. On admet l'existence de $r > 0$ et θ, fonctions C^1 sur I, telles que

$$y = r.\cos\theta,\ y' = -r.\sin\theta$$

7.15.1 Montrer que

$r' = q.r.\cos\theta.\sin\theta$ et $\theta' = 1 + q.\cos^2\theta$

7.15.2 En déduire que

r a une limite finie $r_0 > 0$, et $\theta(t) = t - t_0 + o(1)$.