**Dérivation**

**1** Soit $f$ de $\mathbb{R}$ dans $F$, dérivable en 0 telle que : $\forall x, f(2x) = 2.f(x)$ ; que dire de $f$ ?

**2** Que dire de $f'$ si $f$ est paire, impaire, périodique ? Réciproques ?

**3** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n$. Montrer que card $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ P(x) = e^x \} \leq n+1$. ( Rolle ).

**4** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^b$. Montrer que $f$ est uniformément continue si $b > 0$, constante si $b > 1$.

**5** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $C^\infty$ ayant une infinité de zéros sur $I$, et telle que $\sup_I |f^{(n)}| = O(n!)$. Que dire si $I$ est un segment ? Si $I$ est borné ? Si $I = \mathbb{R}$ ?

**6** Soit $P_n = (X^2 - 1)^n$. Montrer que si $k < n$, alors $P_n^{(k)}(1) = 0$. Montrer que $L_n = P_n^{(n)}$ possède $n$ racines distinctes dans $]-1,1[$. ( Polynômes de Legendre ).

**7** Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}+)$. Montrer l'existence d'une suite $(x_n)$ telle que $\lim_n f'(x_n) = 0$.
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}+)$ décroissante. Est-ce-que $\lim_{+\infty} f' = 0$ ?

**8** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $C^2$. On suppose que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que : $\exists c$, $|f''(c)| \geq 4$.

**9** Soit $P_n = X(X-1)...(X-n)$. Montrer que $P_n'$ a une unique racine, notée $u_n$, dans $]0,1[$. Trouver la limite, puis un DA à 2 termes de $(u_n)$.

**10** Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2 f(x) \sqrt{1 + f^2(x)}$. (Chercher une solution évidente $g$, montrer que $h = g^{-1} o f$ vérifie une équation plus simple).

**11** Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a$ un réel ; limite en 0 de $\dfrac{f(a+x) + f(a-x) - 2f(a)}{x^2}$ ? Trouver les $f$ $C^2$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$. Que peut-on dire si on suppose seulement $f$ $C°$ ?

**12** Montrer que $th^{(n)} = P_n \circ th$, où $P_n$ est une fonction polynomiale. Calculer $P_n$ pour $n \leq 3$. Relation de récurrence vérifiée par $P_n$ ? Degré de $P_n$ ? Que dire des zéros de $P_n$ ? de $th^{(n)}$ ?

**13** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $C^2$ majorée. On suppose que : $\exists \alpha > 0, \forall x$, $f''(x) \geq \alpha f(x)$. Montrer que $f'$ est croissante et que $f'$ et $f$ tendent vers 0 en $+\infty$. Montrer que : $\forall x$, $f(x) \leq f(0)\exp(-x\sqrt{\alpha})$.

**14** Soit $I$ un intervalle, et $f$ une application de $I$ vers $F$ ; on dit que $f$ est strictement différentiable si :
$$\forall x \in I, \exists a \in F, \quad \lim_{(h,k)\to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x+k) - (h-k)a \|}{|h-k|} = 0.$$
Montrer que si $f$ est strictement différentiable, alors $f$ est différentiable. Montrer que la réciproque est fausse (utiliser $x^2 \sin \dfrac{1}{x}$). Montrer que $f$ est strictement différentiable SSI $f$ est de classe $C^1$.