Dérivation

Contents

1 Dérivation des fonctions numériques

1.1 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

1.1.1 Lemme

Soit f dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$; soit $c \in I$ un point où f atteint un maximum.

Alors

$$f'_d(c) \leq 0$$

si elle existe, c'est à dire si c n'est pas la borne droite de I.

Démonstration

$$\forall x \in I,\, x > c \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

En passant à la limite : $f'_d(c) \leq 0$.

De même, $f'_g(c) \geq 0$. Qu'en déduire si $c \in \overset{\circ}{I}$?

Réponse

$$f'(c) = 0$$

1.1.2 Théorème de Rolle

Soit f continue sur un intervalle $I = [a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a) = f(b)$.

Alors

$$\exists c \in \left]a, b\right[,\, f'(c) = 0$$

1.1.3 Théorème des accroissements finis

Soit f continue sur un intervalle $I = [a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; soit $p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Alors

$$\exists c \in \left]a, b\right[,\, f'(c) = p$$

Démonstration

On applique le théorème de Rolle à

$$t \to f(t) - p.t$$

1.1.4 Caractérisation des fonctions dérivables constantes ou monotones sur un intervalle.

Théorème

Soit f dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- f est constante si et seulement si $f' = 0$.
- f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.
- f est strictement croissante si et seulement si $f' \geq 0$, et

$$\{x \in I / f'(x) = 0\}$$

est d'intérieur vide (il n'existe pas d'intervalle non réduit à un point sur lequel f' est nulle).

1.2 Exercices

1.2.1 Une dérivée non continue

$f(x) = x^2 . \sin \frac{1}{x}$; $f(0) = 0$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais f' n'est pas continue en 0.

Démonstration

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leq |x|$, donc $f'(0) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x.\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Soit $u_n = \frac{1}{2.n.\pi}$; $f'(u_n)$ ne tend pas vers $f'(0)$.

1.2.2 La propriété des valeurs intermédiaires

Soit f dérivable sur un intervalle I ; alors $f'(I)$ est un intervalle.

Démonstration

Soit $p(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$; p est continue sur

$$C = \left\{(x,y) \in I^2 / \, x < y\right\}$$

qui est convexe, donc $p(C)$ est un intervalle ; de plus :

$$p(C) \subset f'(I) \subset \overline{p(C)}$$

1.2.3 $f' + \lambda f$

Soit f dérivable sur un intervalle I ; soit $\lambda \in \mathbb{R}$; on suppose que f a deux zéros $a < b$ dans I ; alors

$$\exists c \in I, f'(c) + \lambda f(c) = 0$$

Démonstration

Appiquer le théorème de Rolle à $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$.

1.2.4 Une fonction de classe C^∞

$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ si $x \leq 0$; montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

On montre que

$$\forall x > 0, \forall n \geq 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

où P_n est un polynôme.

Une fonction de classe C^∞ en cloche ?

$g(x) = f(x) f(1-x)$.

1.2.5 Dérivée d'un déterminant

Soit $a_{i,j}$ des fonctions dérivables sur I ; soit $f(x) = \det(a_{i,j}(x))$; montrer que f est dérivable sur I et exprimer f'.

Réponse

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j(x)$$

où $D_j(x)$ est obtenue en dérivant la colonne j. Explication :

$$f(x) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(j),j}(x)$$

D'où

$$f'(x) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(1),1}(x) ... a'_{\sigma(j),j}(x) ... a_{\sigma(n),n}$$

D'où

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}(x) ... a'_{\sigma(j),j}(x) ... a_{\sigma(n),n}$$

1.3 Exercices sur les polynômes scindés de $\mathbb{R}[X]$

1.3.1 Dérivée d'un polynôme scindé de degré $d \geq 2$

Si P est scindé à racines simples, P' est scindé à racines simples ; si P est scindé, P' est scindé.

1.3.2 $P.P'' \leq P'^2$

Si P est scindé, $P.P'' \leq P'^2$.

Démonstration

Soit $d \geq 1$ le degré de P.

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{X - a_j}$$

D'où

$$\frac{P.P'' - P'^2}{P^2} = -\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{(X - a_j)^2}$$

1.3.3 $a_{k-1}.a_{k+1} \leq a_k^2$

On note a_k les coefficients de P scindé ; alors

$$\forall k \geq 1, a_{k-1}.a_{k+1} \leq a_k^2$$

Démonstration

On applique $P.P'' \leq P'^2$ au point 0 : $a_0.a_2 \leq \frac{1}{2}a_1^2 \leq a_1^2$.

Plus généralement, $P^{(k-1)}.P^{(k+1)} \leq \left(P^{(k)}\right)^2$; au point 0 :

$$a_{k-1}.a_{k+1} \leq \frac{k}{k+1} a_k^2$$

2 Dérivation

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie.

2.1 Dérivabilité en un point

2.1.1 Définition 1

Soit f fonction de I dans E, et a élément de I ; on note

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si elle existe.

2.1.2 Définition 2

Soit $c \in E$; c est la dérivée de f au point a si et seulement s'il existe une fonction ε de limite nulle au point 0 telle que

$$\forall h, f\left(a+h\right) = f\left(a\right) + h.c + h\varepsilon\left(h\right)$$

Remarque

Pour quels h la formule s'applique-t-elle ?

2.1.3 Dérivée à gauche, à droite

Soit g la restriction de f à $[a, +\infty[\cap I$; $f'_d\left(a\right) = g'\left(a\right)$ si elle existe ; analogue à gauche.

Remarque

Si a est intérieur à I, $f'\left(a\right)$ existe si et seulement si $f'_g\left(a\right) = f'_d\left(a\right)$.

2.1.4 Utilisation d'une base

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E ; notons

$$f\left(x\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x\right) e_j$$

f est dérivable en a si et seulement si les f_j le sont ; dans ce cas

$$f'\left(a\right) = \sum_{j=1}^{n} f'_j\left(a\right) e_j$$

2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.2.1 Combinaison linéaire de fonctions dérivables

2.2.2 Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire

Théorème

Soit $f : I \to E$ et $L \in L\left(E, F\right)$; soit

$$g = L \circ f$$

Si f est dérivable au point a, alors g aussi, et

$$g'\left(a\right) = L\left(f'\left(a\right)\right)$$

Démonstration

$g\left(a+u\right) = L\left(f\left(a\right) + u.f'\left(a\right) + u.\varepsilon\left(u\right)\right) = g\left(a\right) + u.L\left(f'\left(a\right)\right) + u.L\left(\varepsilon\left(u\right)\right)$

2.2.3 Dérivabilité et dérivée de $B\left(f, g\right)$, où B est bilinéaire

Théorème

Soit $f : I \to E$, $g : I \to F$, et $B : E \times F \to G$ bilinéaire ; E et F sont de dimension finies ; soit

$$h : t \to B\left(f\left(t\right), g\left(t\right)\right)$$

Si f et g sont dérivables au point a, alors h aussi, et

$$h'\left(a\right) = B\left(f\left(a\right), g'\left(a\right)\right) + B\left(f'\left(a\right), g\left(a\right)\right)$$

Démonstration

$B(f(a+u), g(a+u)) = B(f(a) + uf'(a) + u\varepsilon_1(u), g(a) + ug'(a) + u\varepsilon_2(u))$

$B(f(a+u), g(a+u)) = h(a) + u.B(f(a), g'(a)) + u.B(f'(a), g(a)) + u.\varepsilon_3(u)$

avec $\varepsilon_3(u) = ...$

Exemples

Le produit dans $\mathbb{R}$, le produit scalaire, le produit dans $M_n(\mathbb{R})$...

2.2.4 Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle

Théorème

Soit $\varphi : I \to J$ et $f : J \to E$; soit

$$g = f \circ \varphi$$

Si φ est dérivable au point a, et f dérivable au point $b = \varphi(a)$, alors g est dérivable au point a, et

$$g'(a) = \varphi'(a).f'(\varphi(a))$$

Démonstration

$$g(a+u) = f(\varphi(a+u)) = f(\varphi(a) + u\varphi'(a) + u\varepsilon_1(u))$$

$$= f(b) + u\varphi'(a).f'(b) + u\varepsilon_1(u).f'(b) + (u\varphi'(a) + u\varepsilon_1(u))\,\varepsilon_2(u\varphi'(a) + u\varepsilon_1(u))$$

$$= g(a) + u.\varphi'(a).f'(b) + u.\varepsilon_3(u)$$

2.2.5 Applications de classe C^k

Opérations sur les applications de classe C^k : sommes, produits, composées de fonctions de classe C^k le sont.

3 Intégration

3.1 Intégration sur un segment

3.1.1 Définition 1

Soit $I = [a, b]$ un segment ; soit $f : I \to E$; on dit que f est continue par morceaux sur I si... ?

Réponse

Il existe une subdivision finie

$$S = (a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b)$$

$(n \geq 2)$ telle que, pour tout k, $1 \leq k \leq n$, la restriction de f à $]a_{k-1}, a_k[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_{k-1}, a_k]$.

3.1.2 Définition 2

Une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

Exercice

Dans ce cas, l'ensemble D des points de discontinuité de f est fini ou dénombrable.

Démonstration

Supposons par exemple $I =]a, b[$; soit $I_n = \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$; D est une union dénombrable d'ensembles finis :

$$D = \bigcup_{n \geq 1} (D \cap I_n)$$

3.1.3 Définition 3

Soit f continue par morceaux sur $I = [a, b]$; soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E ; notons

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\, e_i$$

On pose

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_I x_i \right) e_i$$

Justification

Soit B' une base de E.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\, e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\, e'_i$$

Notons $u_i = \int_I x_i$ et $v_i = \int_I y_i$; soit P la matrice de passage de B à B' ; on sait que

$$X(t) = P.Y(t)$$

en détail :

$$\forall i \leq n, \forall t \in I, x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}.y_j(t)$$

En intégrant sur I :

$$\forall i \leq n, u_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}.v_j$$

soit $U = P.V$, ce qui montre que le vecteur de coordonnées U dans la base B est le même que le vecteur de coordonnées V dans la base B'.

3.1.4 Linéarité

Théorème

L'application $f \to \int_I f$ est linéaire sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

3.1.5 Relation de Chasles

Elle est vérifiée comme pour les fonctions numériques.

3.1.6 $\left\| \int_I f \right\| \leq \int_I \|f\|$

Théorème

Soit f continue par morceaux sur $I = [a, b]$; $\left\| \int_I f(t)\, \mathrm{d}t \right\| \leq \int_I \|f(t)\|\, \mathrm{d}t$.

Démonstration

Si f est en escalier, c'est l'inégalité triangulaire ; le cas général en découle par densité.

3.2 Sommes de Riemann

3.2.1 Théorème

Soit f continue par morceaux sur $I = [a, b]$; pour $n \geq 1$, notons

$$a_k = a + k.\frac{b-a}{n}$$

$$s_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

Alors, la suite $(s_n(f))$ converge vers $\int_I f$.

Démonstration

Supposons f continue sur $I = [a, b]$; f est alors uniformément continue. On imite la démonstration de la densité de l'ensemble des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues pour la norme $\|\|_\infty$.

Rappelons la notation

$$\omega(h) = \sup\{\|f(u) - f(v)\| / u, v \in I, |u - v| \leq h\}$$

Alors :

$$\forall k, \left\| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f - (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \right\| \leq (a_{k+1} - a_k).\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\left\| \int_I f - s_n(f) \right\| \leq (b-a).\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

3.2.2 Remarque

Attention, on ne peut pas généraliser au cas d'une fonction intégrable sur un intervalle ouvert.

Par contre, la propriété est vérifiée aussi par les fonctions continues par morceaux sur un segment.

3.2.3 Exemple

Soit $p \in \mathbb{N}$; trouver un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

Réponse

On utilise $f : t \to t^p$ sur $I = [0, 1]$.

$$u_n \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

3.3 Primitives

3.3.1 Lemme

Soit f continue au point b ; soit

$$\varepsilon_1(r) = \sup\{\|f(t) - f(b)\| / t \in B(b, r)\}$$

Alors ε_1 tend vers 0 en 0^+.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$; soit $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in \overline{B}\left(b,\delta\right), \left\|f\left(t\right) - f\left(b\right)\right\| \leq \varepsilon$$

Alors

$$\forall r \in \left[0,\delta\right], \varepsilon_1\left(r\right) \leq \varepsilon_1\left(\delta\right) \leq \varepsilon$$

3.3.2 Dérivation d'une intégrale

Théorème

Soit $a \in I$ intervalle quelconque ; soit f continue sur I ; soit $F : x \to \int_a^x f$; alors

$$F' = f$$

On dit que F est une primitive de f.

Démonstration

Soit $b \in I$.

$$\forall h,\ F\left(b+h\right) - F\left(b\right) = \int_b^{b+h} f = h.f\left(b\right) + R\left(h\right)$$

où

$$R\left(h\right) = \int_b^{b+h} \left(f\left(t\right) - f\left(b\right)\right) dt$$

Quelle propriété de R doit-on montrer ?

Réponse

On doit montrer que $R\left(h\right) = o\left(h\right)$; or $\left\|R\left(h\right)\right\| \leq \left|h\right| \varepsilon_1\left(\left|h\right|\right)$; le lemme précédent permet de conclure.

Variantes

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-\infty}^{x} f = f\left(x\right), \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_x^b f = -f\left(x\right)$$

3.3.3 Généralisation

Que dire de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{a(x)}^{b(x)} f$$

Si a et b sont dérivables à valeurs dans I et f continue sur I :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{a(x)}^{b(x)} f = b'\left(x\right).f\left(b\left(x\right)\right) - a'\left(x\right).f\left(a\left(x\right)\right)$$

Explication

On calcule la dérivée de $F\left(b\left(x\right)\right) - F\left(a\left(x\right)\right)$.

3.3.4 Les fonctions constantes

Lemme

Si $F' = 0$ sur un intervalle, F est constante.

Démonstration

Attention, on ne peut pas appliquer le théorème des accroissements finis à F, mais on peut l'appliquer aux composantes.

Contre-exemple

$F(t) = (\cos t, \sin t)$; $F(0) = F(2\pi)$, mais F' ne s'annule pas.

3.3.5 Intégration d'une dérivée

Théorème

Soit $a \in I$ intervalle quelconque ; soit F de classe C^1 sur I ; alors

$$\forall x \in I, F(x) = F(a) + \int_a^x F'$$

Démonstration

Découle de ce qui précède. Plus précisément :
$x \to F(x)$ et $x \to F(a) + \int_a^x F'$ ont la même dérivée et coïncident en a.

3.3.6 Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1

Théorème

Soit F de classe C^1 sur $I = [a, b]$; soit $M = \sup\limits_I \|F'\|$; alors

$$\|F(b) - F(a)\| \leq M(b - a)$$

Démonstration

On applique $\left\|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_I \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ avec $f = F'$.

3.3.7 Intégrale sur une période

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une fonction continue et T-périodique. Alors

$$g : x \to \int_x^{x+T} f$$

est une constante.

1e méthode

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

2eméthode

Autre méthode qui s'applique même si f est seulement continue par morceaux. On utilise la relation de Chasles et un changement de variable.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g(x) = \int_x^{x+T} f = \int_x^0 f + \int_0^T f + \int_T^{x+T} f$$

Avec le changement de variable $t = T + u$:

$$\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(T+u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

D'où

$$g(x) = \int_0^T f = g(0)$$

3.4 Formules de Taylor

3.4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f de classe C^n sur I, a, x des éléments de I ; $f(x) = T(x) + R(x)$, où

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

et

$$R(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t$$

Démonstration

Intégration par parties et récurrence sur n.

Autre forme

$$R(x) = (x-a)^n \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}((1-u)a + ux)\, \mathrm{d}u$$

3.4.2 Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe C^n

Soit $M_n = \sup\limits_{[a,x]} \left\| f^{(n)} \right\|$.

$$\|R(x)\| \leq \frac{M_n}{n!} |x-a|^n$$

3.4.3 Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^n

Soit f de classe C^n sur I, a un élément de I ; $f(x) = T(x) + R(x)$, où

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction de limite nulle au point a.

Démonstration

Posons

$$g(x) = \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}((1-u)a + ux)\, \mathrm{d}u$$

La fonction g est continue au point a (et même sur I), et

$$g(a) = \frac{1}{n} f^{(n)}(a)$$

On peut utiliser la continuité d'une intégrale à paramètre, ou une démonstration directe...

3.5 Exemples

3.5.1 $p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

Exercice

Illustrer, et montrer que

$$\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

En déduire la limite de (p_n).

Démonstration

$$\forall x \geq 0, |\ln(1+x) - x| \leq M_2.\frac{x^2}{2}$$

Ici, $M_2 = 1$; d'où :

$$\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

Pour $n \geq 1$ fixé :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

D'où :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n+1}{2n}$$

Conclusion :

$$\lim_{n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{e}$$

3.5.2 $M_1^2 \leq 2.M_0.M_2$

Exercice

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; on suppose f et f'' bornées ; on veut montrer que f' est bornée et que

$$M_1^2 \leq 2.M_0.M_2$$

Soit x quelconque et $h > 0$; on écrit

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + R_1$$

et

$$f(x-h) = f(x) - h.f'(x) + R_2$$

Majorer R_1 et R_2 ; en déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$$

et conclure.

Réponse

$$|R_1|, |R_2| \leq M_2\frac{h^2}{2}$$

Il faut minimiser $h \to \frac{1}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$ pour $h > 0$.

On peut étudier les variations.

Variante

Le produit étant constant, la somme est minimale quand

$$\frac{1}{h}M_0 = \frac{h}{2}M_2$$

Dans ce cas, on utilise la formule $2a = 2\sqrt{a.a}$:

$$\frac{1}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2 = 2\sqrt{\frac{1}{h}M_0.\frac{h}{2}M_2} = \sqrt{2.M_0.M_2}$$

4 Arcs paramétrés, tangente

4.1 Définition

Soit I un intervalle ; soit $f \in C^1(I, E)$; on dit que le paramètre $t_0 \in I$ est régulier si $f'(t_0) \neq 0$.

4.2 Interprétation géométrique

En un point régulier, la courbe admet une tangente dont $f'(t_0)$ est un vecteur directeur.

Justification

$$\overrightarrow{M_{t_0}M_t} = f(t) - f(t_0) = (t - t_0) f'(t_0) + (t - t_0) \varepsilon (t - t_0)$$

Dans le cas où $f'(t_0) \neq 0$

$$\overrightarrow{M_{t_0}M_t} \sim (t - t_0) f'(t_0)$$

Un cas particulier

Le cas usuel des courbes définies par

$$g : x \to g(x)$$

On sait que si $g'(x)$ existe, c'est la pente de la tangente à la courbe au point $(x, g(x))$.

C'est bien un cas particulier :

$$f : t \to (t, g(t))$$

ou encore :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{cases}$$

Un vecteur directeur de la tangente est

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix}$$

On remarque que dans ce cas, tout point est régulier.

4.3 Un point non régulier

Soit f définie par $f(t) = (0, t^2)$ si $t \leq 0$ et $f(t) = (t^2, 0)$.

Que dire de $t_0 = 0$? f est-elle de classe C^1 ?

4.4 Une ellipse

Soit $a > 0$ et $b > 0$; $f(t) = (a.\cos t, b.\sin t)$.

- Une équation ?
- Quels sont les points réguliers ?
- Equation de la tangente en un point ?

Réponse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$f'(t_0) = (-a.\sin t_0, b.\cos t_0)$$

Les points de la tangente sont caractérisés par $\left(\overrightarrow{M_0M},\ f'(t_0)\right)$ liée ; soit

$$\frac{x.x_0}{a^2} + \frac{y.y_0}{b^2} = 1$$

5 Complément : le théorème de relèvement

5.1 Le cas C^1

5.1.1 Enoncé

Soit I un intervalle et $f \in C^1(I, \mathbb{U})$.

Il existe $\theta \in C^1(I, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall t \in I,\ f(t) = e^{i\theta(t)}$$

Dans la suite, on notera

$$f(t) = x(t) + i\,y(t)$$

Utilisation

Si $g \in C^1(I, \mathbb{C}^*)$, on peut écrire

$$g(t) = r(t)\,.e^{i\theta(t)}$$

avec $r(t) = |g(t)|$, r et θ de classe C^1.

5.1.2 Cas très particulier

C'est le cas où $-1 \notin f(I)$.

Il suffit de poser

$$\theta(t) = \operatorname{Arg} f(t) = 2.\arctan \frac{y(t)}{1 + x(t)}$$

5.1.3 Cas où f n'est pas surjective

On se ramène au cas précédent.

5.1.4 Cas général

Supposons l'existence de θ. Alors :

$$\theta' = -i\frac{f'}{f}$$

On pose donc

$$\theta(t) = \theta(t_0) - i\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\mathrm{d}u$$

En dérivant

$$f(t)\,e^{-i\theta(t)}$$

on vérifie que

$$f = e^{i\theta}$$

On en déduit que θ est à valeurs réelles.

5.2 Cas où f est C^0

Ici, on cherche θ continue.

Si f n'est pas surjective, c'est identique au cas C^1.

Cas général

Supposons $I = [a, b]$.

Soit J l'ensemble des $t \geq a$ tels qu'un relèvement existe sur $[a, t]$.

On introduit

$$s = \sup J$$