Calcul différentiel

1 $x\left[(\ln x)^2+y^2\right]$

Soit $U=]0,+\infty[$ et f définie sur U par

$$f(x,y)=x\left[(\ln x)^2+y^2\right]$$

1- Déterminer les points critiques.
2- f admet-elle un extremum global ?
3- Donner l'équation du plan affine tangent P en $(1,0)$ à la surface $\sum$ définie par $z=f(x,y)$.
4- Exprimer la différentielle de f en $(1,1)$.

Indications

Deux points critiques : $(1,0)$ et $\left(e^{-2},0\right)$. $(1,0)$ est un minimum global.

$$P: z=0$$

2 $x^2+\left(y^3-y\right)^2$

1- Déterminer coordonnées et natures des extremums sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f:(x,y)\to x^2+\left(y^3-y\right)^2$$

2- Même question pour la restriction g de f au disque $\overline{D}(0,1)$.

Indications

1- Les points critiques : $(0,0),(0,\pm1),\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; les 3 premiers sont des minimums absolus ; les deux autres ne sont pas des extremums.
2- Les minimums sont évidemment les mêmes ; sur la frontière, $x^2=1-y^2$ et :

$$g(x,y)=1+y^4\left(y^2-2\right)\le 1$$

Donc le maximum de g vaut 1, atteint en $(\pm1,0)$.

3 $(y-x)^3+6xy$

Déterminer les extrema de

$$f:(x,y)\to(y-x)^3+6xy$$

sur

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\le x\le y\le 1\right\}$$

Indications

On vérifie que A est compact et f continue ; donc f/A atteint un maximum et un minimum. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$; on cherche les points critiques ; on en trouve deux : $a=(0,0)$ et $b=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
De plus, $f(a)=0$ et $f(b)=-\frac{1}{2}$.
Ensuite, on cherche les valeurs prises par f sur la frontière B de A.
Soit $B_1=\{(x,y)\in A/\,x=y\}$; $f(B_1)=[0,6]$.
Soit $B_2=\{(x,y)\in A/\,x=-1\}$ et $B_3=\{(x,y)\in A/\,y=1\}$; on montre que

$$f(B_2)=f(B_3)=[m,6]$$

où m est le minimum sur $[-1,1]$ de $P : t \to (1-t)^3 + 6t$. On trouve que $m = P\left(1-\sqrt{2}\right) = 6 - 4\sqrt{2} > 0$.

Conclusion :

$$\min_A f = -\frac{1}{2},\ \max_A f = 6$$

4 $\frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

On note $U =]0,+\infty[^2$, $E = [0,+\infty[^2$, et $F = E \setminus \{(0,0)\}$.

On définit f sur F par

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

On pose $f((0,0)) = 0$.

1- Montrer que f est continue sur E.

2- Déterminer le minimum de f sur E.

3- Montrer que f admet un maximum sur E.

4- Le déterminer.

Indications

1- f est visiblement continue sur F. De plus :

$$\forall (x,y) \in F,\ |f(x,y)| \leq \|(x,y)\|_\infty$$

ce qui prouve la continuité en 0.

3-

$$\forall (x,y) \in F,\ 0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{\|(x,y)\|_\infty}$$

ce qui prouve que f tend vers 0 quand $\|(x,y)\|_\infty$ tend vers $+\infty$.

4- On cherche les points critiques de f sur U ; on en trouve un seul :

$$A = (1,1)$$

D'où $\max_E f = f(A) = \frac{1}{8}$.

Remarque

On a donc montré que

$$\forall (x,y) \in E,\ 8xy \leq (1+x)(1+y)(x+y)$$

Comment montrer ça de façon élémentaire ?

A l'aide de

$$\forall u > 0,\ \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}} \geq 2$$

5 $\left(x^2 - y\right)\left(3x^2 - y\right)$

Soit

$$g : (x,y) \to \left(x^2 - y\right)\left(3x^2 - y\right)$$

Soit λ un réel ; montrer que

$$x \to g(x, \lambda x)$$

admet un minimum local en 0 ; $(0,0)$ est-il un minimum local de g ?

Réponse

Non ; il suffit de considérer $g(x,y)$ avec $y = 2x^2$ et x tendant vers 0.

6 $\left|\sin(x+iy)\right|^2$

Trouver les extrema de
$$f:(x,y)\to\left|\sin(x+iy)\right|^2$$
sur
$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,x^2+y^2\leq 1\right\}$$

Indications

Après calculs :
$$f(x,y)=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$$
Ω est compact et f continue ; donc f/Ω atteint un maximum et un minimum. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$; on cherche les points critiques ; on en trouve un seul :
$$O=(0,0)$$
C'est l'unique minimum de f. Le maximum est atteint en $(0,1)$ et $(0,-1)$.

7 $e^{x+y}+e^{3-x}+e^{3-y}$

On définit f sur $E=\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=e^{x+y}+e^{3-x}+e^{3-y}$.

1- Montrer que $f(z)$ tend vers $+\infty$ quand $\|z\|\to\infty$.
2- Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$.
3- Le déterminer.
4- Retrouver le résultat précédent en utilisant la convexité de la fonction exponentielle.

Indications

1- On fixe $M>0$; on fixe $a<0$ tel que $e^{3-a}\geq M$; puis $b>0$ tel que $e^{a+b}\geq M$. Soit $R=[a,b]^2$. Hors de R, $f\geq M$. (faire un dessin).

2- Soit $M=f(0)$, et a et b déterminés plus haut. R est compact et f continue, donc f/R atteint un minimum en un point c :
$$\forall z\in R,\ f(z)\geq f(c)$$
De plus :
$$\forall z\in E\setminus R,\ f(z)\geq M=f(0)\geq f(c)$$
(car $0\in R$). Donc $f\geq f(c)$ sur E.

3- On trouve un seul point critique, $(1,1)$, qui est donc le minimum. Donc :
$$\forall(x,y)\in E,\ e^{x+y}+e^{3-x}+e^{3-y}\geq f(c)=3e^2$$

4- exp étant convexe sur $\mathbb{R}$:
$$\forall u,v,w,\ \exp\left(\frac{u+v+w}{3}\right)\leq\frac{1}{3}\left(e^u+e^v+e^w\right)$$

8 $\frac{1}{2}\langle f(x),x\rangle-\langle u,x\rangle$

Soit E un espace euclidien, u un élément de E, et f un endomorphisme symétrique défini positif. On définit g sur E par
$$g:x\to\frac{1}{2}\langle f(x),x\rangle-\langle u,x\rangle$$

1- Montrer que g est différentiable en tout point $x\in E$ et exprimer $\mathrm{d}g(x)$.
2- Montrer que g admet un unique point critique a.
3- Est-ce un extremum ?

Indications

1-

$$\forall x, h \in E,\ g(x+h) = g(x) + \langle f(x) - u, h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle$$

Donc

$$\nabla g(x) = f(x) - u$$

2- Seul point critique : $a = f^{-1}(u)$.

3-

$$\forall h \in E,\ g(a+h) = g(a) + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle$$

a est donc un minimum local strict.

9 $\frac{X^T.A.X}{X^T.X}$

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit

$$f : X \to \frac{X^T.A.X}{X^T.X}$$

définie sur $U = E \setminus \{0\}$.

1- Montrer que f admet un minimum.

2- Chercher les points critiques.

Indications

On se ramène facilement au cas où A est diagonale. On supposera

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

et

$$\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$$

1-

$$\forall X \in U,\ X^T.A.X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2$$

Donc λ_1 est le minimum de f, atteint en tout point de $U \cap E_{\lambda_1}(A)$.

2- On part de

$$\forall x \in U,\ f(x) . \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2$$

On applique ∂_k :

$$\partial_k f(x) . \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2x_k . f(x) = 2\lambda_k x_k$$

Les points critiques sont ceux qui vérifient :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k . (f(x) - \lambda_k) = 0$$

Ce sont les vecteurs propres de A.

10 Différentielle de l'exponentielle

1- Soit $M = \begin{bmatrix} a & t \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2- Soit $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Calculer $\mathrm{d}_D(\exp)$.

3- Généraliser au cas de D matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$.

Indications

Si $a \neq b$:

$$M^n = \left[\begin{array}{cc} a^n & \frac{b^n-a^n}{b-a}t \\ 0 & b^n \end{array} \right]$$

$$\exp M = \left[\begin{array}{cc} e^a & \frac{e^b-e^a}{b-a}t \\ 0 & e^b \end{array} \right]$$

11 Fonctions harmoniques radiales

Soit $n \geq 2$ et $U = \mathbb{R}^n - \{0\}$; chercher les fonctions harmoniques sur U pour lesquelles existe g de classe C^2 sur $I =]0, +\infty[$ vérifiant :

$$\forall x \in U, f(x) = g\left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)$$

ou encore :

$$\forall x \in U, f(x) = g\left(\|x\|_2^2\right)$$

Etudier les cas $n = 2$ et $n = 3$.

Indications

On trouve que Δf est nul si

$$\forall u > 0, 2ug''(u) + ng'(u) = 0$$

Cas $n = 2$

$$g(u) = A + B.\ln u$$

Cas $n = 3$

$$g(u) = A + \frac{B}{\sqrt{u}}$$

Donc

$$f(x) = A + \frac{B}{\|x\|} = A + \frac{B}{r}$$

Ce qui fait penser à ?

Cas $n \geq 3$

$$f(x) = A + \frac{B}{r^{n-2}}$$

12 Le théorème de Schwarz

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^2(U, \mathbb{R})$; montrer que

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f$$

On pourra utiliser $\delta(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)$.

Indications

On suppose $n = 2$ et $0 \in U$.

Pour $x > 0$ et $y > 0$, on pose

$$\delta(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)$$

Fixons $y > 0$; posons $g(x) = f(x, y) - f(x, 0)$; alors

$$\delta(x, y) = g(x) - g(0)$$

Donc

$$\exists c \in]0, x[, \delta(x, y) = x.g'(c) = x.(\partial_1 f(c, y) - \partial_1 f(c, 0))$$

Avec une deuxième application du théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in \left]0, x\right[, \exists c' \in \left]0, y\right[, \delta(x, y) = xy.\partial_2\partial_1 f(c, c')$$

De manière symétrique :

$$\exists d \in \left]0, x\right[, \exists d' \in \left]0, y\right[, \delta(x, y) = xy.\partial_1\partial_2 f(d, d')$$

D'où :

$$\partial_2\partial_1 f(c, c') = \partial_1\partial_2 f(d, d')$$

Pour $x = y$ tendant vers 0 :

$$\partial_2\partial_1 f(0, 0) = \partial_1\partial_2 f(0, 0)$$

13 Distance à une partie

Soit E un espace euclidien, U un ouvert non vide, et F un fermé non vide de E.

1- Soit f et g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$, a un élément de U. On suppose
- $f \leq g$,
- $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ existent,
- $f(a) = g(a)$

Montrer que $\mathrm{d}f(a) = \mathrm{d}g(a)$.

2- Soit f, h_1, h_2 trois fonctions de U dans $\mathbb{R}$, a un élément de U. On suppose
- h_1 et h_2 différentiables au point a,
- $h_1(a) = h_2(a)$,
- $h_1 \leq f \leq h_2$

Montrer que f est différentiable en a.

3- Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$, a, b deux éléments de U. On suppose
- f 1-lipschitzienne sur U,
- $[a, b] \subset U$,
- $f(b) - f(a) = \|b - a\|$

Montrer que $\mathrm{d}f(c)$ existe pour tout $c \in \left]a, b\right[$.

Désormais, on note

$$f(x) = \mathrm{d}(x, F)$$

4- Montrer que

$$\forall a \in E, \exists p \in F, \mathrm{d}(a, F) = \|a - p\|$$

5- Montrer que si $f(a) = \|a - p\|$, alors

$$\forall x \in \left]a, p\right[, f(x) = \|x - p\|$$

6- Soit $a \in E \setminus F$ et $p \in F$ tel que $\mathrm{d}(a, F) = \|a - p\|$. On suppose que $\mathrm{d}f(a)$ existe. Montrer que

$$\nabla f(a) = \frac{a - p}{\|a - p\|}$$

En déduire l'unicité de p.

7- On suppose désormais F convexe. Montrer que le point p de la question 4 est unique.

8- Montrer que la fonction f est différentiable sur $E \setminus F$.

Indications

1- a est un minimum de $g - f$.

3- Utiliser 2 avec

$$h_1(x) = f(b) - \|b - x\|, \; h_2(x) = f(a) + \|a - x\|$$

6- On utilise Q1 avec $g(x) = \|x - p\|$.

8- Remarquer que f est 1-lipschitzienne.

14 Fonctions convexes différentiables

Soit f définie et convexe sur $\mathbb{R}^2$.

1- Montrer que f est continue en $(0, 0)$.

2- On suppose que les deux dérivées partielles existent au point $(0, 0)$.

Montrer que $\mathrm{d}f$ existe en ce point.

15 Fonctions convexes de classe C^1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert convexe de $E = \mathbb{R}^n$, et $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.

1- Montrer que f est convexe si et seulement si :

$$\forall a, b \in U,\ f(b) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), b - a \rangle \ \ (H)$$

2- Montrer que

$$M = \{x \in U / \, \mathrm{d}f(x) = 0\}$$

est un fermé de U convexe.

Indications

On suppose (H).

Soit a, b éléments de U, t élément de $[0,1]$ et $c = (1-t)a + tb$.

On écrit

$$f(a) \geq f(c) + \langle \nabla f(c), a - c \rangle$$

$$f(b) \geq f(c) + \langle \nabla f(c), b - c \rangle$$

D'où $(1-t) f(a) + t f(b) \geq ...$

16 Tangents à $O_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1- Déterminer les $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$$

2- Déterminer les vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ au point I_n.

17 Tangents à $SL_n(\mathbb{R})$

Déterminer les vecteurs tangents à $SL_n(\mathbb{R})$ au point I_n.

Indications

On trouve l'ensemble des matrices de trace nulle.

Penser à utiliser la différentielle de det, et la fonction exponentielle.

18 Tangents aux nilpotents

Soit

$$N = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) / M^2 = 0 \right\}$$

Déterminer les vecteurs tangents à N en A si

1- A est la matrice nulle

2- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3- A est quelconque.

Indications

1- $A = 0$; les vecteurs tangents sont les vecteurs de N.

2- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; supposons

$$\gamma(t) = A + t.T + o(t)$$

et

$$\forall t, \gamma^2(t) = 0$$

Alors
$$\forall t,\ A^2 + t\,(AT + TA) + o\,(t) = 0$$
Donc
$$AT + TA = 0$$
Donc les vecteurs tangents sont de la forme $T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$.

Inversement, on vérifie que ces vecteurs sont tangents ; par exemple, pour $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$:
$$\gamma\,(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ -t^2 & -t \end{bmatrix}$$

19 Minimisation I

Soit J fonction de $E = \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

On suppose que ∇J est $M-$lipchitzien sur E et que J est coercive :
$$\lim_{\|x\| \to +\infty} J\,(x) = +\infty$$

On se donne α, β tels que
$$0 < \alpha < \beta < \frac{2}{M}$$

1- Montrer que J atteint un minimum.

2- Montrer que pour $x, y \in E$:
$$J\,(y) = J\,(x) + \langle y - x, \nabla J\,(x) \rangle + \int_0^1 \langle \nabla J\,((1-u)\,x + uy) - \nabla J\,(x)\,, y - x \rangle\, \mathrm{d}u$$

3- Soit (r_k) une suite de réels vérifiant :
$$\forall k \geq 0,\ \alpha \leq r_k \leq \beta$$
On définit une suite par $x_0 \in E$ et
$$x_{k+1} = x_k - r_k.\nabla J\,(x_k)$$
Montrer que $(J\,(x_k))$ est décroissante.

4- On suppose de plus que J possède un unique point critique a.

Montrer que (x_k) converge vers a.

Indications

1- Vu en cours.

2- Utiliser
$$\varphi : u \to J\,((1-u)\,x + uy)$$

3- Montrer que la norme de l'intégrale de la question 2 est majorée par
$$\frac{M}{2}.\,\|y - x\|^2$$

4- Montrer d'abord que (x_k) est bornée.

Ensuite, vérifier que
$$0 \leq r_k.\,\|\nabla J\,(x_k)\|^2 \left(1 - \frac{M}{2} r_k\right) \leq J\,(x_k) - J\,(x_{k+1})$$
En déduire que $(\nabla J\,(x_k))$ tend vers 0, puis que a est la seule valeur d'adhérence de (x_k).

20 Minimisation II

Soit f de $E = \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 ; on suppose les dérivées partielles premières et secondes bornées. On fixe $r > 0$, $x_0 \in E$, et on définit x_{k+1} par

$$f(x_{k+1}) + \frac{\|x_{k+1} - x_k\|^2}{2r} = \min_{x \in E} f(x) + \frac{\|x - x_k\|^2}{2r}$$

1- Etudier l'existence du minimum.

2- Etudier l'unicité du minimum.

3- Montrer que $\|x_{k+1} - x_k\|$ est bornée.

4- On définit une fonction y_r par $y(kr) = x_k$ et affine sur les $[x_k, x_{k+1}]$. Montrer que quand r tend vers 0, y_r tend vers une fonction y et trouver une équation différentielle vérifiée par y.

Indications

1- $x \to f(x) + \frac{\|x - x_k\|^2}{2r}$ est continue et tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$; on en déduit l'existence d'un minimum.

2- Ici, il faut supposer $r > 0$ suffisamment proche de 0. Pour alléger, supposons $x_k = 0$, et soit

$$g : x \to f(x) + \frac{\|x\|^2}{2r}$$

donc

$$\nabla g(x) = \nabla f(x) + \frac{1}{r} x$$

Soit $c_1 > 0$ tel que ∇f soit c_1-lipschitzienne ; il suffit que $\frac{1}{r} > c_1$ pour que ∇g soit injective ; dans ce cas, g a au plus un point critique.

3- Soit $c_2 > 0$ tel que f soit c_2-lipschitzienne.

$$\frac{1}{2r} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq f(x_k) - f(x_{k+1}) \leq c_2 \|x_k - x_{k+1}\|$$

Donc $\|x_{k+1} - x_k\|$ est bornée par $2rc_2$.

4-

$$y'(t) = -(\nabla f)(y(t))$$