Suites de fonctions

1 Convergence de $(f_n.g_n)$

Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions de X dans $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur X vers f et que (g_n) converge uniformément sur X vers g.

1. On suppose de plus que f et g sont bornées. Montrer que $(f_n.g_n)$ converge uniformément sur X vers $f.g$.
2. Contre-exemple dans le cas contraire ?

Indications

1. On rappelle que f et g étant bornées, f_n et g_n sont bornées à partir d'un certain rang n_0. En effet :

$$f_n = f + (f_n - f)$$

De plus :

$$\forall n \geq 0,\ f_n.g_n - f.g = (f_n - f)\, g_n + f\,(g_n - g)$$

Donc

$$\forall n \geq n_0,\ \|f_n.g_n - f.g\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty . \|g_n\|_\infty + \|f\|_\infty . \|g_n - g\|_\infty$$

2.

$$X = \mathbb{R},\ f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$$

2 $\arctan nx$

Soit $f_n : x \to \arctan nx$; étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $I = [0, +\infty[$ et sur des parties de I.

Indications

C'est une suite de fonctions continues sur I qui converge simplement vers une fonction f discontinue en 0 ; donc la suite ne converge pas uniformément sur I.

Soit $a > 0$ et $J = [a, +\infty[$.

$$\forall n \geq 1,\ \sup_J |f_n - f| = M_n = \left|\frac{\pi}{2} - \arctan na\right|$$

La suite (M_n) tend vers 0, donc (f_n) converge uniformément vers f sur J.

3 $\sin x.\cos^n x$

Soit $f_n : x \to \sin x.\cos^n x$ et $g_n : x \to n.\sin x.\cos^n x$.

1- Etudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2- Même question avec (g_n).

Indications

1- (f_n) converge simplement sur I vers 0, uniformément sur $J = \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En effet

$$\sup_J |f_n| \leq \cos^n a$$

suite qui tend vers 0.

Montrons que la suite converge uniformément sur I

On cherche le maximum

$$m_n = \max_I |f_n| = \max_I f_n$$

On trouve que

$$m_n = f_n(u_n)$$

avec

$$u_n = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et

$$\forall n \geq 1, 0 \leq m_n \leq \sin(u_n) \leq u_n$$

qui tend vers 0.

Remarque : le théorème de Dini s'applique.

2- Cas de (g_n) :

(g_n) converge simplement sur I vers 0.

La convergence n'est pas uniforme, car $\left(\int_I g_n\right)$ ne tend pas vers 0.

$$\forall n \geq 0, \int_0^1 g_n = \frac{n}{n+1}$$

On peut aussi utiliser le maximum.

4 $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right)$

On définit une suite de fonctions polynomiales par $P_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\left(X - P_n^2\right)$$

On étudie la convergence de (P_n) sur $I = [0, 1]$.

1- On fixe $x \in I$ et on définit (u_n) par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left(x - u_n^2\right)$$

Etudier la convergence de (u_n).

On notera f la limite simple de (P_n) sur I.

2- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1} = (1 - P_n).P'_n + \frac{1}{2}$$

3- Montrer que $P_n - f$ est décroissante sur I pour tout $n \geq 0$.

4- Montrer que (P_n) converge uniformément sur I.

5- Quel théorème est ainsi illustré ?

6- Est-ce-que (P_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$?

7- Trouver une suite (Q_n) de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers

$$h : x \to |x|$$

8- Tracer (P_n) pour $0 \leq n \leq 5$ avec Python.

Indications

1- Soit

$$h_x : t \to t + \frac{1}{2}\left(x - t^2\right)$$

On vérifie que h_x a un unique point fixe dans I : $\sqrt{x}$ et que $[\sqrt{x}, 1]$ est stable par h_x. On montre que (u_n) est décroissante et converge vers $\sqrt{x}$.

3- Notons

$$g_n = P_n - f$$

On montre par récurrence sur n que g_n est décroissante sur I. On notera $J = I \setminus \{0\}$

$$\forall x \in J,\, g'_{n+1}(x) = (1 - P_n(x))\,.P'_n(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\forall x \in J,\, g'_{n+1}(x) = (1 - P_n(x))\,.\left(g'_n(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\forall x \in J,\, g'_{n+1}(x) = (1 - P_n(x))\,.\left(g'_n(x)\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)$$

4-

$$M_n = \sup_I |P_n - f| = P_n(0) - f(0)$$

Donc (M_n) tend vers 0, ce qui signifie que la suite converge uniformément sur I.

5- Le théorème de densité de Weierstrass.

6- Non, voir un exercice du cours.

7-

$$Q_n = P_n\left(X^2\right)$$

5 Densité de $\mathbb{Z}[X]$

Soit $I = [a, b]$ un segment contenu dans $]0, 1[$. On note

$$E = \left(C^0(I, \mathbb{R}), \|\|_\infty\right)$$

Soit A l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients entiers.

1. Montrer que $\overline{A}$ est un sous-anneau de E.
2. Soit p premier. On note

$$Q_p = \frac{1}{p}\left(1 - X^p - (1 - X)^p\right)$$

Montrer que Q_p est dans A.

3. Majorer $\left\|\frac{1}{p} - Q_p\right\|_\infty$.
4. Montrer que A est dense dans E.
5. Est-ce-que A est dense dans E si $I = [0, 1]$?

Indications

2. p divise $\binom{p}{k}$ si $1 \leq k \leq p - 1$.
3. $\left\|\frac{1}{p} - Q_p\right\|_\infty \leq \frac{1}{p}\left(b^p + (1 - a)^p\right)$.

4. D'après le théorème de Weierstrass, il suffit de montrer que $\overline{A}$ contient les fonctions polynomiales. Comme c'est un anneau qui contient les monômes, il suffit de montrer qu'il contient les constantes.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On montre d'abord que

$$\lim_p \frac{\lfloor \lambda p \rfloor}{p} = \lambda$$

et ensuite

$$\lim_p \lfloor \lambda p \rfloor .Q_p = \lambda$$

6 Le deuxième théorème de Dini

Soit $S = [a, b]$ un segment. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles, croissantes sur S, qui converge simplement vers une fonction f continue sur S.

Montrer que la convergence est uniforme.

Etudier le cas où S est un intervalle quelconque.

7 $g_{u,v}(x) = f(ux+v)$

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit E le sous-espace engendré par les $g_{u,v}$. Soit S un segment non trivial.

Montrer que f n'est pas polynomiale si et seulement si E est dense dans $\left(C^0(S,\mathbb{R}), \|\|_\infty\right)$.

8 $\|f_n''\|_\infty \leq M$

Soit S un segment et (f_n) une suite de fonctions de classe C^2 sur S. On suppose que :

- (f_n) converge simplement sur S vers une fonction f.
- $\exists M > 0, \forall n \geq 0, \|f_n''\|_\infty \leq M$.

Que conclure ?

Indications

Soit (h_k) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Soit $a \in S$.

$$f'(a) = \lim_k \frac{f(a+h_k) - f(a)}{h_k} = \lim_k \lim_n \frac{f_n(a+h_k) - f_n(a)}{h_k}$$

On applique le théorème de la double limite et on obtient que $(f_n'(a))$ converge vers $f'(a)$. On montre ensuite que cette convergence est uniforme sur S.

Enfin on montre que la convergence de (f_n) est uniforme sur S.

9 $u_n = 2^{-n}.\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.f\left(\frac{k}{n}\right)$

Soit $I = [0,1]$ et $f \in C^0(I,\mathbb{R})$. Soit $u_n = 2^{-n}.\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que (u_n) converge vers 0.

Indications

Etudier le cas où f est polynomiale.

10 Vers le théorème de convergence dominée

Soit S un segment, et (f_n) une suite décroissante de fonctions en escalier qui converge simplement vers 0 sur S.

Montrer sans le théorème de convergence dominée que $\left(\int_S f_n\right)$ tend vers 0.

Indications

Fixer $\varepsilon > 0$, et montrer l'existence de g_n continue sur S telle que

- $0 \leq g_n \leq f_n$
- $\int_S f_n - g_n \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$

Ensuite appliquer le théorème de Dini à (h_n) où

$$h_n = \min(g_0, ..., g_n)$$

11 Continuité de la limite

(f_n), (g_n) sont deux suites de fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$. h est une fonction de A dans $\mathbb{R}$. On suppose que

- (f_n) et (g_n) convergent simplement vers h
- $\forall n \geq 0,\ f_n \leq h \leq g_n$

Montrer que h est continue.