Exponentielle

1 Exponentielle dans $M_2(\mathbb{C})$

Soit
$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$$
Calculer $\exp(M)$.

Indications

Plusieurs méthodes :
- diagonaliser M (si $a \neq b$)
- résoudre $X' = M.X$
- chercher $P \in \mathbb{C}_1[X]$ tel que $P(M) = \exp(M)$
- calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$

Réponse

Si $a \neq b$
$$\exp(M) = \begin{bmatrix} e^a & \frac{e^b - e^a}{b-a}.c \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$$
sinon
$$\exp(M) = \begin{bmatrix} e^a & e^a.c \\ 0 & e^a \end{bmatrix}$$

2 $e^A = P(A)$, cas particuliers

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$; trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = \exp(A)$
1- dans le cas où $A^3 = A^2$
2- dans le cas où $(A - I_n)^2 (A - 2I_n) = 0$

Réponse

1- $P = 1 + X + (e-2) X^2$ (calcul direct).
2- Cas particulier : $A = I_n + N$ avec $N^2 = 0$; d'après la formule de Taylor :
$$P(A) = P(I_n + N) = P(1) I_n + P'(1) N$$
on cherche P tel que $P(1) = e$, $P'(1) = e$.
Cas général : on cherche P tel que
$$P(2) = e^2,\ P(1) = e,\ P'(1) = e$$

3 $e^u = P(u)$

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in L(E)$. Montrer que
$$\{P \in \mathbb{C}[X] \,/\, P(u) = e^u\}$$
est non vide et contient un unique polynôme de degré minimal.

4 $\left(e^{\frac{A}{k}}.e^{\frac{B}{k}}\right)^k$

On note $E = M_n(\mathbb{R})$.

Pour G, sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ fermé dans E, on note

$$E_G = \left\{X \in E / \forall t \in \mathbb{R},\, e^{tX} \in G\right\}$$

1- Déterminer E_G pour $G = O_n(\mathbb{R})$.

2- Montrer que pour une norme subordonnée :

$$\forall A, H \in E,\, \left\|(A+H)^k - A^k\right\| \leq (\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k$$

3- Montrer que

$$\forall A, B \in E,\, \lim_k \left(e^{\frac{A}{k}}.e^{\frac{B}{k}}\right)^k = e^{A+B}$$

4- Montrer que E_G est un sous-espace vectoriel de E.

Indications

1- E_G est l'ensemble des matrices antisymétriques.

2- On peut procéder par récurrence sur n.

5 Coefficients non diagonaux positifs

1- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre

- Tous les coefficients non diagonaux de A sont positifs.
- Pour tout $t \geq 0$, les coefficients de $\exp(tA)$ sont positifs.

2- On suppose cette condition vérifiée ; soit X solution de

$$X'(t) = A.X(t) + B(t)$$

avec B continue sur un intervalle I, à coefficients positifs, et $X(0)$ également à coefficients positifs.

Montrer que pour tout $t \geq 0$, les coefficients de $X(t)$ sont positifs.

Indications

1- Soit B une matrice quelconque ; pour simplifier, on note $B \geq 0$ si tous les coefficients de B sont positifs ; il est clair que si $B \geq 0$, alors $\exp(B) \geq 0$.

Donc, si $A \geq 0$ et $t \geq 0$, alors $\exp(tA) \geq 0$.

Supposons maintenant que tous les coefficients non diagonaux de A sont positifs.

On peut trouver un réel $t \geq 0$ tel que

$$B = A + t.I_n \geq 0$$

Alors :

$$\exp(A) = e^{-t}.\exp(B) \geq 0$$

car B et $t.I_n$ commutent.

Réciproque

On suppose que $\exp(tA) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

$$\frac{\exp(tA) - I_n}{t}$$

a pour limite A quand t tend vers 0, donc, par passage à la limite, les coefficients non diagonaux de A sont positifs.

2- On applique la méthode de variation de la constante :

$$X(t) = \exp(tA).X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\, ds$$

Donc $X(t) \geq 0$ si $t \geq 0$.

6 Solutions de signe positif

Soit $I = \mathbb{R}+$.

1- Soit $A \in M_n(\mathbb{R}+)$; soit (E) l'équation

$$X'(t) = A.X(t)$$

Soit $X \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ une solution de (E) telle que $X(0) \geq 0$. Montrer que

$$\forall t \geq 0,\ X(t) \geq 0$$

2- Soit $a_0, ..., a_{n-1}$ des réels positifs. Soit y une solution sur I de

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k.y^{(k)}$$

On suppose que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ y^{(k)}(0) \geq 0$.

Montrer que y est C^∞ sur I et

$$\forall t \in I, \forall k \in \mathbb{N},\ y^{(k)}(t) \geq 0$$

Indications

1- $\forall t \geq 0$, $\exp(tA) \geq 0$.

2- Utiliser le système associé et la question 1.

7 $e^{zA}.B.e^{-zA}$

Soit A et B éléments de $M_n(\mathbb{C})$; on suppose que

$$z \to e^{zA}.B.e^{-zA}$$

est bornée sur $\mathbb{C}$.

Montrer que $AB = BA$.

Indications

Utiliser un théorème hors-programme sur les séries entières.

8 $X' = AX + Bu$

Soit $T > 0$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit C la matrice par blocs

$$C = \left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right]$$

Montrer l'équivalence entre

1- C est de rang n.

2- Pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in C^0([0,T], \mathbb{R}^p)$ et $X \in C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ telles que

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t) \\ X(0) = 0,\ X(T) = V \end{cases}$$