Fonctions numériques continues, dérivables

1 $f(I) \subset I$

Soit $I = [a, b]$ un segment et f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1- On suppose que $f(I) \subset I$. Montrer que f possède un point fixe.
2- On suppose que $I \subset f(I)$. Montrer que f possède un point fixe.
3- Trouver un contre-exemple si I est seulement un intervalle.

Indications

1- Soit $g : t \to f(t) - t$. $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.
2- Soit a_1 un antécédent de a, b_1 un antécédent de b.
On examine $g(a_1)$ et $g(b_1)$.
3- $t \to t + 1$ et $I = \mathbb{R}$. $t \to t^2$ et $I =]0, 1[$.

2 $f(nx) = f(x)$

Chercher les fonctions f continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0,\ f(nx) = f(x)$$

3 $f \circ g = g \circ f$

Soit $I = [0, 1]$, f et g deux fonctions continues de I dans I telles que $f \circ g = g \circ f$.
On veut montrer que :

$$\exists c \in I,\ f(c) = g(c)$$

3.1 1e méthode

1- On suppose que :

$$\forall x \in I,\ f(x) > g(x)$$

Montrer que :

$$\exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I,\ f^n(x) \geq g^n(x) + na$$

(f^n signifie ici $f \circ ... \circ f$).
2- En déduire une contradiction.
3- Conclure.

3.2 2e méthode

On note $F(f)$ l'ensemble des points fixes de f.
1- Montrer que $F(f)$ est un compact non vide.
2- Montrer que $F(f)$ est stable par g.
3- Conclure à l'aide de max et min de $F(f)$.

4 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \in \{f(a), f(b)\}$

Soit I un intervalle ; chercher les fonctions continues f de I dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \in \{f(a), f(b)\}$$

Indications

Si par l'absurde $u = f(a) \neq f(b) = v$, construire deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles

$$\forall n \geq 0,\ f(a_n) = u,\ f(b_n) = v$$

5 $f \circ f = \cos$

1- Montrer que cos admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}$.
2- Montrer qu'il n'existe pas de fonction f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \cos$.

Indications

2- Supposons l'existence de f ; soit α le point fixe de cos ; soit $\beta = f(\alpha)$; montrer que β est aussi un point fixe de cos.

6 $n = \sum_{k=1}^{n} f'(x_k)$

Soit f dérivable sur $[0,1]$ à valeurs réelles telle $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
1- Montrer l'existence de n réels distincts $x_1, ..., x_n$ tels que

$$n = \sum_{k=1}^{n} f'(x_k)$$

2- Montrer l'existence de n réels distincts $x_1, ..., x_n$ tels que

$$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)}$$

Indications

1- Théorème des accroissements finis entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$.
2- Théorème des accroissements finis entre α_{k-1} et α_k, antécédents par f de $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$.

7 $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$

Soit f une fonction dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall x \in [0,1],\ (f(x), f'(x)) \neq (0,0)$$

Montrer que l'ensemble des zéros de f est fini.

8 $\|f'\|_\infty \leq \frac{2}{b-a}\|f\|_\infty + \frac{b-a}{2}\|f''\|_\infty$

Soient $a < b$ deux réels. Soit $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$.
Montrer que

$$\|f'\|_\infty \leq \frac{2}{b-a}\|f\|_\infty + \frac{b-a}{2}\|f''\|_\infty$$

Indications

Soit $x \in [a, b]$.

$$f(a) = f(x) + (a - x) f'(x) + R_1$$

$$f(b) = f(x) + (b - x) f'(x) + R_2$$

On soustrait, et on majore R_1 et R_2 à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange...

9 $f'' \geq \alpha f$

Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, et $\alpha > 0$. On suppose que f est majorée et que sur $\mathbb{R}^+$:

$$f'' \geq \alpha f$$

1- Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
2- Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
3- Montrer que

$$\forall x \geq 0,\ f(x) \leq f(0) . e^{-\sqrt{\alpha} x}$$

Indications

1- f' est croissante, donc possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2- f' est croissante et tend vers 0, donc $f' \leq 0$.
3- On remarque que

$$f'.f'' \leq \alpha f.f'$$

qu'on intègre sur $[x, +\infty[$.

10 Deux parties dénombrables denses dans $\mathbb{R}$

Soient A et B deux parties dénombrables denses dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un homéomorphisme f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f(A) = B$.