# Valeurs propres et vecteurs propres

## 1 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{bmatrix}$

Trouver pour quelles valeurs de $a$, 2 est valeur propre de $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{bmatrix}$.

#### Réponse

On cherche s'il existe $x, y, z$ non tous nuls tels que $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Après calculs :

$$a = -1$$

Dans ce cas, les valeurs propres de $M$ sont $0, 2, 3$.

## 2 $u \circ v$ et $v \circ u$

Soit $u$ et $v$ deux éléments de $L(E)$.

1- Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre non nulle de $u \circ v$, $\lambda$ est une valeur propre de $v \circ u$.

2- Montrer que si de plus $E$ est de dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

3- Donner un exemple où $u \circ v$ et $v \circ u$ n'ont pas les mêmes valeurs propres.

#### Réponse

Soit $\lambda$ est une valeur propre non nulle de $u \circ v$ ; soit $x \in E - \{0\}$ tel que

$$u \circ v(x) = \lambda . x$$

Alors

$$v \circ u \circ v(x) = \lambda . v(x)$$

Donc

$$v \circ u(v(x)) = \lambda . v(x)$$

De plus, $v(x)$ est non nul, donc $\lambda$ est une valeur propre de $v \circ u$.

Supposons de plus $E$ de dimension finie ; on sait que $\det(u \circ v) = \det(v \circ u)$ ; or 0 est valeur propre de $u \circ v$ si et seulement si $\det(u \circ v) = 0$.

Finalement, 0 est valeur propre de $u \circ v$ si et seulement si 0 est valeur propre de $v \circ u$.

Pour finir, un exemple : $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ; $u(f) = f'$ et $v(f)$ primitive de $f$ nulle en 0.

## 3 Image d'un endomorphisme diagonalisable

Soit $u$ un élément de $L(E)$ diagonalisable. Décrire l'image de $u$ en fonction des sous-espaces propres.

#### Indications

$\mathrm{Im}u$ est la somme des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}u \setminus \{0\}$.

# 4 Diagonale et antidiagonale

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$. Soit $u \in L(E)$ l'endomorphisme qui à $M$ associe la matrice dont les coefficients sont nuls, sauf ceux de l'antidiagonale qui sont ceux de la diagonale de $M$.

Quels sont les éléments propres de $u$ ? Est-il diagonalisable ?

### Indications

Si $n$ est pair, $u^2 = 0$ ; sinon, $u^2 = u^3$.

# 5 $u^k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k v_j$

Soit $E$ un $K-$espace vectoriel de dimension finie, $p \geq 1$, $\lambda_1, ..., \lambda_p$ $p$ scalaires distincts, $v_1, ..., v_p$ $p$ endomorphismes, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k v_j$$

1- Montrer que $\forall P \in K[X], P(u) = \sum_{j=1}^{p} P(\lambda_j) v_j$
2- Montrer que $u$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$.
3- Montrer l'existence de $p$ polynômes $L_1, ..., L_p$ tels que $\forall i, j,\ L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$.
4- Les $\lambda_j$ sont-ils les valeurs propres de $u$ ?
5- Que dire de $v_i \circ v_j$ ? de $v_1, ..., v_p$ ?

### Indications

2- On utilise 1, avec $P = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)$ qui est scindé à racines simples.
4- Si $v_j$ est non nul, alors $\lambda_j$ est valeur propre de $u$. Car, toujours d'après 1,

$$u \circ v_j = u \circ L_j(u) = (X.L_j)(u) = \lambda_j v_j$$

5- $v_1, ..., v_p$ sont les projecteurs associés à la décomposition de $E$ en somme de sous-espaces propres.

# 6 $M_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & n \end{bmatrix}$

Soit$M_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & n \end{bmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $M_n$ est diagonalisable et possède trois valeurs propres vérifiant

$$a_n < 0 < b_n < 2 < c_n$$

2. Trouver limite et équivalent de $(c_n)$.
3. Trouver limites et équivalents de $(a_n)$ et $(b_n)$.

### Réponse

1. $M_n$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ ; on calcule le polynôme caractéristique :

$$P_n = \chi_{M_n} = X^3 - (n+2)X^2 + (2n-1)X + 1$$

D'où $P_n(0) = 1$ et $P_n(2) = -1$ ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il y a donc une valeur propre dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$.

2. $P_n(-1) = -1 - 3n < 0$ ; donc $-1 < a_n < 0$ ; donc $(a_n)$ et $(b_n)$ sont bornées ; or

$$\forall n \geq 2, a_n + b_n + c_n = n + 2$$

D'où

$$c_n \sim n$$

3. Pour $n \geq 2$ : $1 < b_n < 2$ ; de plus, $a_n.b_n.c_n = -1$ ; donc $(a_n)$ converge vers 0. D'où :

$$a_n.b_n + a_n.c_n + b_n.c_n = 2n - 1 \sim b_n.c_n$$

Donc $(b_n)$ converge vers 2. Avec le produit des racines :

$$a_n \sim -\frac{1}{2n}$$

**Variante**

Fixons $\varepsilon > 0$ et examinons $P_n(-\varepsilon)$ :

$$P_n(-\varepsilon) = -n\left(2\varepsilon + \varepsilon^2\right) + c$$

où $c$ ne dépend pas de $n$. Donc

$$\lim_n P_n(-\varepsilon) = -\infty$$

Donc

$$\exists n_0, \forall n > n_0,\ P_n(-\varepsilon) < 0$$

Pour $n > n_0$, toujours avec le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur propre $a_n$ est donc dans l'intervalle $]-\varepsilon, 0[$, ce qui prouve que $\lim_n a_n = 0$.

On montre de même que $\lim_n b_n = 2$.

# 7 $AB^2 - B^2A = B$

Soit $E = M_n(\mathbb{C})$ et $A, B \in E$ telles que $AB^2 - B^2A = B$. On veut montrer que $B$ est nilpotente.

1- Simplifier $A.B^{2k} - B^{2k}.A$.

2- Trouver un endomorphisme de $E$ dont $B^{2k-1}$ est vecteur propre.

3- Montrer que $B$ est nilpotente.

4- Montrer que l'indice de nilpotence de $B$ est impair.

**Indications**

1- Par récurrence sur $k$ :

$$\forall k \geq 1,\ A.B^{2k} - B^{2k}.A = k.B^{2k-1}$$

2- Soit

$$u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ X & \to & AXB - BXA \end{array}$$

Si $B^{2k-1} \neq 0$, alors $B^{2k-1}$ est un vecteur propre de $u$, et $k$ valeur propre.

3- Or $u$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, donc $B$ est nilpotente.

4- Si $k \geq 1$ et $B^{2k} = 0$, alors $B^{2k-1} = 0$ ; donc l'indice est impair.

# 8 $X \to AX - XB$

On note $F = M_n(\mathbb{C})$, et $A, B$ deux éléments de $F$.

Soit $\varphi \in L(F)$ défini par

$$\varphi(X) = AX - XB$$

1- Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$, $\mu$ une valeur propre de $B$. A l'aide d'une matrice de la forme $X_1.X_2^T$, montrer que $\lambda - \mu$ est une valeur propre de $\varphi$.

2- Soit $E$ un $\mathbb{C}-$espace de dimension $n$. Soit $f \in L(E)$ et $\psi$ l'endomorphisme de $L(E)$ suivant :

$$\psi : u \to f \circ u - u \circ f$$

Montrer que si $f$ est nilpotent, $\psi$ l'est aussi.

3- Etudier la réciproque.

**Indications**

1- $X_1$ et $X_2$ non nuls tels que $AX_1 = \lambda X_1$ et $BX_2 = \mu X_2$.
2- $\psi$ est la somme de deux endomorphismes qui commutent ; on peut utiliser la formule du binôme.
3- On ne peut pas montrer que $f$ est nilpotent, mais à l'aide de 1-, on montre que $f$ n'a qu'une seule valeur propre ; donc $f$ est la somme d'une homothétie et d'un nilpotent.

## 9 $M(f)(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$

Si $f$ est une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, on définit $M(f)$ par

$$M(f)(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$M^{(k)}(f)(n) \underset{k\to+\infty}{\to} f(1)$$

## 10 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$

Soit $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \in M_n(K)$, $A$ et $B$ carrées. On suppose que $A$ et $B$ ont chacune une seule valeur propre. Donner une CNS pour que $M$ soit diagonalisable.

## 11 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(K)$, $A$ carrée. CNS pour que $M$ soit diagonalisable ?

## 12 $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$

On suppose que $0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$. On définit $A$ par

$$\forall i,\ a_{i,i} = 0$$

$$\forall i \neq j,\ a_{i,j} = a_j$$

1- Calculer $\mathrm{Det}(A)$.
2- Montrer que $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$$

3- Montrer que $A$ est diagonalisable.
4- Dans le cas où $a_k = k$ pour tout $k$, trouver un équivalent de $\rho(A)$ quand $n \to +\infty$.

## 13 Corps algébriquement clos

Soit $K$ un corps. Montrer l'équivalence entre :
- $K$ est algébriquement clos.
- Pour tout $n \geq 1$, tout endomorphisme de $K^n$ possède un vecteur propre.

## 14 $T_A : M \to AM - MA$

On note $E = M_n(\mathbb{C})$ ; pour $A \in E$, on note $T_A$ l'endomorphisme de $E$ :

$$T_A : M \to AM - MA$$

1- Montrer que si $A$ est nilpotente, $T_A$ également.
2- Montrer que si $A$ ne possède qu'une valeur propre, $T_A$ est nilpotente.
3- On suppose que $A$ possède deux valeurs propres distinctes $\alpha$ et $\beta$. Montrer que $T_A$ n'est pas nilpotente en construisant un vecteur propre de la forme $X.Y^T$ associé à la valeur propre $\alpha - \beta$.
4- Montrer que si $A$ est diagonalisable, $T_A$ également.
5- On suppose $T_A$ diagonalisable. Soit $X_0$ un vecteur propre de $A$. Montrer que pour tout $M$ vecteur propre de $T_A$, $MX_0$ est nul ou vecteur propre de $A$. Montrer que $A$ est diagonalisable.
6- On suppose que $M$ est un vecteur propre de $T_A$ associé à une valeur propre non nulle $\lambda$. Montrer que $M$ est nilpotente.

**Indications**

6- Utiliser $A.M^k - M^k A$.

## 15 $M_1 = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

1- Montrer que $M_1$ et $M_2$ sont diagonalisables.
2- Soit

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| \geq |y|\right\}$$

Montrer que $M_1 C \subset C$, $M_2 C \subset C$, $M_1 C \cap M_2 C = \{0\}$.
3- On suppose $p \geq 1$, $q \geq 1$,

$$A_1 ... A_p = B_1 ... B_q$$

et chaque $A_i$ et chaque $B_i$ vaut $M_1$ ou $M_2$.
Montrer que $p = q$ et

$$\forall i,\ A_i = B_i$$

4- Montrer que toutes les matrices de la question 3 sont diagonalisables.