Planche 205

I) Convergence sur $\mathbb{R}_+$ de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$.
La fonction somme est-elle continue sur son ensemble de définition ?
Montrer qu'elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis la déterminer.

II) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Si A est diagonalisable, prouver que B l'est aussi et déterminer ses valeurs propres en fonction de celles de A.

Planche 206

I) Convergence et calcul éventuel de $I_{k,n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer le rayon de convergence R de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^{n+1}} x^n$.

Justifier que $\forall x \in]-R, R[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

II) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$ et $\operatorname{tr} M = 0$.
Montrer que les valeurs propres de M sont racines de $X^3 - 4X^2 + 4X$ et en déduire l'ensemble des matrices qui vérifient ces hypothèses.

Planche 207

I) On pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.
Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f à déterminer.
Montrer que (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$ et ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

II) Rappeler une CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable.
Montrer que si $A^2 - 5A + 6I_n = 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines de $x^2 - 5x + 6$.
Soit D la matrice diagonalisée de A ; montrer que f, l'application qui, à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $MD + DM$, est un endomorphisme.
Montrer que f est diagonalisable (on pourra décomposer les matrices en blocs).
Montrer que g défini par $g(M) = MA + AM$ est diagonalisable.

Planche 208 II abordable dès la 1ère année

I) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n}$ et on note $S(x) = \sum_{k\geqslant 2} u_k(x)$.
Donner le domaine de convergence simple D de S.
Montrer que S ne converge pas normalement sur D.

Montrer que, pour $x \in D$, $\left| \displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} u_k(x) \right| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

Montrer que S est continue sur D. Est-elle intégrable sur D ?

II) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Montrer que $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ sont en somme directe.
Trouver un vecteur de $\operatorname{Ker} f^2$ qui n'est pas dans $\operatorname{Ker} f$.

Trouver une base B' dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Montrer que si $g^2 = f$, $\operatorname{Ker} f^2$ est stable par g ; que peut-on en déduire ?

Planche 209

I) X et Y, variables aléatoires discrètes et indépendantes, suivent la même loi ; $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de p.
Calculer la fonction $G_X(t) = E(t^X)$, génératrice de X et en déduire la loi de X.

II) Montrer que $< f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ munit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
Soient $F = \{f \in E, \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$ et $G = \{f \in E, \forall x \in [-1, 0], f(x) = 0\}$; montrer que ce sont deux sous-espaces orthogonaux de E ; sont-ils supplémentaires ?
Justifier que $G \subset F^\perp$. On veut montrer que $G = F^\perp$.
Pour $g \in F^\perp$, on pose $f_n(x) = 0$ si $x \in [0,1]$, $f_n(x) = g(0)$ si $x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x)$ est affine sur $\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$; calculer $< f_n, g >$ et montrer que $g(0) \displaystyle\int_{-1}^{0} g(t)dt = 0$.
On choisit f nulle sur $[0, 1]$ et $f(x) = g(x) - g(0)$ sur $[-1, 0]$; montrer que $g \in G$ et conclure.

Planche 210

I) Trouver les x réels tels que la suite de fonctions $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$ converge.
Calculer $\sup_{n\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$; qu'en déduit-on ?
Déterminer le domaine de convergence D de $\sum f_n$; la convergence est-elle absolue sur D ? Normale ? Que dire de la convergence de la série sur $\mathbb{R}\backslash]-a, a[$, $a > 0$?

II) Définir une norme ; $N_0(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$, $N_1(f) = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,dt$ et $N_2(f) = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right| + \left|\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt\right| + \left|\displaystyle\int_0^1 f''(t)dt\right|$ définissent-elles des normes sur $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$?

Montrer que $\forall f \in E$, $\exists c \in [0, 1]$, $f(c) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Montrer que $\forall f \in E$, $N_0(f) \leqslant N_1(f)$; peut-il y avoir égalité ?
Montrer qu'il n'existe aucun réel a tel que $N_1(f) \leqslant aN_0(f)$.

Concours divers option MP

Planche 211 ICNA

I) Soit $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{k_i} \in \mathbb{C}[X]$; exprimer $\dfrac{P'}{P}$ comme combinaison linéaire des $\dfrac{1}{X - a_i}$ et en déduire la valeur de $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$.
Soit f continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$; montrer que le théorème des sommes de Riemann peut s'appliquer à $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$ puis éduire des questions précédentes la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{x - e^{it}}$ où x est un complexe de module différent de 1.
Retrouver la valeur de I en utilisant une série de fonctions.

II) On doit transmettre une information I à N personnes numérotées de 1 à N ; chacune d'elles peut donner l'information reçue avec une probabilité p ou en donner le contraire avec une probabilité $1 - p$; on note p_n la probabilité que la personne n donne l'information I ; calculer p_2 et p_3.
Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n puis exprimer p_n en fonction de n.

Planche 212 Navale

I) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.
Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
Montrer que $Sp(u) \subset [0, 2]$. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$.

II) Continuité sur $\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Planche 213 Navale

I) Soient f et g continues sur $[a, b]$.

On suppose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (f(t) + xg(t))dt \geqslant \int_a^b f(t)dt$; déterminer $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$.

On suppose f strictement positive et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b |f(t) + xg(t)|\,dt \geqslant \int_a^b f(t)dt$; déterminer $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$. Que peut-on dire si f est seulement positive ?

II) Soient A et B matrices complexes de taille n.
On suppose que $AM = MB$ si et seulement si $M = 0$; montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire sous la forme $AN - NB$.
On suppose que A et B n'ont aucune valeur propre commune ; montrer que $AM = MB$ si et seulement si $M = 0$. Est-ce toujours le cas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Planche 214 Navale

I) Montrer que $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.

Montrer que $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx \leqslant \frac{\ln 3}{2}$.

II) On munit E euclidien d'une base quelconque $(e_1, \ldots, e_n)$.

Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont strictement positive.
Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g tel que $g^2 = f^{-1}$.
Montrer que $\big(g(e_1), \ldots, g(e_n)\big)$ est une base orthonormale de E.

Planche 215 Navale

I) Si u est un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien, montrer que $u \circ u = \mathrm{Id} \Leftrightarrow u$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ le polynôme caractéristique de u est scindé.

II) Si (a_n) est une suite à temes positifs telle que $\sum a_n$ converge, a-t-on $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$? Si, de plus, (a_n) est décroissante, a-t-on $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

Planche 216 IMT, abordable dès la 1ère année

I) Que dire de la matrice, dans une base orthonormée, d'un endomorphisme f de E euclidien, vérifiant $\forall (x, y) \in E^2$, $< f(x), y >= - < x, f(y) >$? Le démontrer.
Montrer que, si $\dim E = 2$, l'ensemble $A(E)$ de ces endomorphismes est inclus dans $C(E)$, celui des endomorphismes g qui commutent avec tout élément f de $A(E)$ (on pourra commencer par déterminer $C(E)$).

II) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, f de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et g définie sur I par $g(0) = f'(0)$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

Montrer que $\forall x \in I$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt$ puis que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I.

Planche 217 IMT, I abordable dès la 1ère année

I) Soient deux entiers naturels non nuls m et n tels que n divise m.
Montrer que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$.
Dans le cas général, à quelle(s) condition(s) $X^n - 1$ divise-t-il $X^m - 1$?

II) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})dx$ suivant $\alpha \in \mathbb{R}$.

Planche 218 IMT

I) Combien y a-t-il de 0 à la fin de 2019! ?

II) Ensemble de définition I de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)dt$.

Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I et donner une équation différentielle qu'elle vérifie.
Montrer que f est développable en série entière en 0 et écrire ce développement.

Planche 219 IMT

I) Pour a et b donnés dans $\mathbb{R}^n$, f défini par $f(x) =< a, x > b$ est-il diagonalisable ?

II) Domaine de définition, continuité et dérivabilite de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Arc\,tan}(nx)n^2$.

