Polynômes de matrices

1 Minimal dans $M_n(\mathbb{R})$ et dans $M_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$; montrer que son polynôme minimal est le même dans $M_n(\mathbb{R})$ et dans $M_n(\mathbb{C})$.

2 $-I_n = A^2 + B^2$

1- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que

$$\det\left(A^2 + t.I_n\right) \geq 0$$

2- On suppose n impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas la somme de deux carrés de $M_n(\mathbb{R})$.

3 $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}$

Soit E un $K-$espace vectoriel, f et g deux endomorphismes. On suppose que

$$f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}$$

1- Que dire de la dimension de E ?
2- Montrer que

$$\forall P \in K[X],\ f \circ P(g) - P(g) \circ f = P'(g)$$

3- Montrer que $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre .
4- Donner un exemple dans le cas $E = K[X]$.

Indications

1- Penser à la trace.
2- On le montre pour les monômes.
3- Si g possède un polynôme minimal P, alors

$$P'(g) = 0$$

donc P divise P', contradiction.
4-

$$f : P \to P',\ g : P \to X.P$$

4 $f^3 = \mathrm{Id}$

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in L(E) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}$.
1- Que dire des valeurs propres de f ?
2- Montrer l'existence d'une base B de E telle que

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Indications

1- La dimension étant impaire, f a au moins une valeur propre ; et les valeurs propres de f sont racines de

$$P = X^3 - 1 = (X-1)\left(X^2 + X + 1\right)$$

Donc

$$\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$$

2-

$$E = F \oplus G$$

avec $F = \ker(f - \mathrm{Id})$ et $G = \ker\left(f^2 + f + \mathrm{Id}\right)$. $F \neq E$, donc $G \neq \{0\}$.

On choisit

$$e_2 \in G \setminus \{0\}$$

e_2 n'est pas un vecteur propre, donc $(e_2, f(e_2))$ est libre.

On choisit $e_3 = f(e_2)$...

5 $A^3 = A + I_n$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$ telle que $A^3 = A + I_n$.

1. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$? Que dire des valeurs propres de A ?
2. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$?
3. Que dire du polynôme minimal M_A ?
4. Montrer que $\det A > 0$.

Indications

1. Soit $P = X^3 - X - 1$; on montre en étudiant les variations que P n'a qu'une racine réelle $\lambda > 0$; donc aussi deux racines β et $\overline{\beta}$ non réelles ; on sait que les valeurs propres de A sont racines de P. P étant scindé à racines simples, A est diagonalisable.
2. A n'est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ que si $A = \lambda I_n$.
3. M_A est un diviseur de P : P ou $X - \lambda$ ou $(X - \beta)\left(X - \overline{\beta}\right)$.
4.

Méthode 1 :

Le polynôme caractéristique $Q = \chi_A$ n'a pas de racines négatives car A n'a pas de valeurs propres négatives ; il est donc de signe constant sur $]-\infty, 0]$; il tend vers $\pm\infty$ en $-\infty$ selon la parité de n. Donc $Q(0)$ est du signe de $(-1)^n$.

Or on sait que

$$\det A = (-1)^n . Q(0)$$

Conclusion : $\det A > 0$.

Méthode 2 :

Soit p, q, r les multiplicités de $\lambda, \beta, \overline{\beta}$ dans χ_A.

$$\det A = \lambda^p . \beta^q . \overline{\beta}^r$$

De plus $q = r$ car $\mathrm{tr}\, A$ est un réel ; donc

$$\det A = \lambda^p . \left(\beta . \overline{\beta}\right)^r > 0$$

6 $A^n = I_n$

Soit $n \geq 2$ et soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $\left(I_n, A, ..., A^{n-1}\right)$ libre.

Montrer que $\mathrm{tr}\, A = 0$.

Indications

On montre d'abord que le polynôme minimal de A est

$$P = X^n - 1$$

Ensuite on montre que $\chi_A = X^n - 1$. Donc

$$\mathrm{Sp}\, A = \mathbb{U}_n$$

Il reste à vérifier que la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

On note

$$\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$$

La somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$$

7 χ_u scindé

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in L(E)$.

Montrer que χ_u est scindé si et seulement si tout sous-espace stable par u non réduit à $\{0\}$ contient un vecteur propre.

Indications

Supposons que tout sous-espace stable par u non réduit à $\{0\}$ contient un vecteur propre. En particulier E contient un vecteur propre. On sait qu'alors il existe un hyperplan H de E stable par u.

On peut raisonner par récurrence : l'hypothèse de récurrence s'applique à u_H, endomorphisme de H induit par u.

8 $E = \mathrm{Ker}\, Q(u) \oplus \mathrm{Im}\, Q(u)$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in L(E)$. Soit Q et R deux éléments de $K[X]$ tels que $Q \wedge R = 1$. Soit $P = QR$.

On suppose que $P(u) = 0$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}\, Q(u) \oplus \mathrm{Im}\, Q(u)$$

Indications

On sait que

$$E = \mathrm{Ker}\, Q(u) \oplus \mathrm{Ker}\, R(u)$$

De plus

$$\mathrm{Im}\, Q(u) \subset \mathrm{Ker}\, R(u)$$

On termine à l'aide du théorème du rang.

9 $AM = MB$

Soit A, B, et M éléments de $M_n(\mathbb{C})$ tels que $AM = MB$, et $M \neq 0$.

1. Comparer $P(A).M$ et $M.P(B)$ pour tout polynôme P.
2. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.
3. Réciproquement, on suppose que A et B ont une valeur propre commune. Montrer l'existence de $M \neq 0$ telle que $AM = MB$.

Indications

1. On montre d'abord que $P(A).M = M.P(B)$ quand P est un monôme.
2. On choisit

$$P = \chi_A = \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j)$$

Alors

$$0 = \chi_A(A).M = M.\prod_{j=1}^{n} (B - \alpha_j I_n)$$

3. Soit λ valeur propre commune. Soit X et Y deux colonnes non nulles telles que

$$AX = \lambda X,\ B^T Y = \lambda Y$$

Soit

$$M = X.Y^T$$

On vérifie que $AM = MB$.

10 $A^3 + A^2 + A = 0$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

1- Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

2- Est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$?

3- Montrer que $\operatorname{rg} A$ est pair.

4- Donner un exemple d'une telle matrice non nulle dans $M_2(\mathbb{R})$ et dans $M_3(\mathbb{R})$.

5- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A^3 + A^2 + A = 0$, est-ce que $\operatorname{rg} A$ est pair ?

Indications

1- $P = X^3 + X^2 + X = X\left(X^2 + X + 1\right)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

2- Non sauf si $A = 0$.

3- Soit D une matrice diagonale semblable à A ; il y a sur la diagonale de D p fois 0, q fois j et r fois $\overline{j}$. La trace de A étant réelle :

$$\operatorname{tr} A = q.j + r.\overline{j} \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\operatorname{Im}(\operatorname{tr} A) = (q - r)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Pour finir,

$$\operatorname{rg} A = q + r = 2q$$

4- Des matrices compagnons :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5- Non, par exemple une matrice diagonale bien choisie :

$$j.E_{1,1}$$

11 $m = \dim \operatorname{Ker}(u)$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in L(E)$. On suppose que 0 est racine de multiplicité $m \geq 1$ de χ_u.

Montrer que 0 est racine simple du polynôme minimal μ_u si et seulement si

$$m = \dim \operatorname{Ker}(u)$$

12 $A = P(M)$

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

1- A est diagonalisable.

2- $\forall P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X], \exists M \in M_2(\mathbb{C}), A = P(M)$.

13 $A = P(B)$ ou $B = P(A)$

Soit A et B éléments de $M_n(\mathbb{C})$ tels que $AB = BA$.

1- On suppose que $n = 2$. Montrer que $A \in \mathbb{C}[B]$ ou $B \in \mathbb{C}[A]$.

2- Etudier le cas $n > 2$.

3- Etudier le cas de $M_n(\mathbb{R})$.

Indications

1- Distinguer les cas : 1 ou 2 valeurs propres, diagonalisable ou non.

2-
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3- Se ramène au cas complexe.

14 A^q et A^{q+1}

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A^q est diagonalisable. Montrer que A^{q+1} est diagonalisable.

15 A et A^q

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^q est diagonalisable et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^q$.

16 $\mathrm{Tr} M^n \neq 0$

Soit $n \geq 2$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

- $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{Tr} M^k = 0$
- $\mathrm{Tr} M^n \neq 0$

Montrer que M est inversible et diagonalisable.