Intégrales à paramètre

1 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$

Soit
$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$
Etudier définition, monotonie, continuité, limites de f.

Donner un équivalent de f aux bornes ; on pourra calculer $f(x) + f(x+1)$.

Réponse

f est définie et décroissante sur $I =]0, +\infty[$.

Pour la continuité, on fixe $a > 0$:

$$\forall x \geq a, \forall t > 0, \left|\frac{1}{t^x(1+t)}\right| \leq \frac{1}{t^a(1+t)} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

Equivalents

$$\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$$

En 0

f étant continue au voisinage de 1 :
$$f(x) \sim \frac{1}{x}$$

En $+\infty$

f étant décroissante :
$$\forall x > 0,\ 2f(x) \geq f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$$
$$\forall x > 1,\ 2f(x) \leq f(x) + f(x-1) = \frac{1}{x-1}$$

Donc :
$$\forall x > 1,\ \frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

Conclusion :
$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

2 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}$

Soit
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$$
Trouver le domaine de définition de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f ; calculer $f'(x)$, puis $f(x)$.

Réponse

Par parité, on étudie pour $x \geq 0$. $f(x)$ est défini pour tout $x \geq 0$.

On montre que f est continue sur $D = [0, +\infty[$. Domination :

$$\forall x \in [0, a], \forall t > 0, \left| \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} \right| \leq \frac{a}{(1+t^2)}$$

car :

$$\forall u \geq 0,\ 0 \leq \arctan u \leq u$$

Il est paradoxalement plus facile de montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}+$; domination :

$$\forall x \geq 0, \forall t > 0, \left| \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} \right| \leq \frac{1}{(1+t^2)}$$

On en déduit :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

Puis :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{\pi}{2}.\ln(1+x)$$

3 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} \mathrm{d}t$

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} \mathrm{d}t$; trouver le domaine de définition de f ; étudier la continuité de f ; calculer $f(0)$, $f'(x)$, puis $f(x)$.

Réponse

$f(x)$ est défini pour $x \geq 0$. On montre que $f(0) = -f(0)$ à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$. Donc

$$f(0) = 0$$

On montre que f est continue sur $D = [0, +\infty[$. Domination :

$$\forall x \in [0, a], \forall t > 0, \left| \frac{\ln(x+t^2)}{(1+t^2)} \right| \leq \frac{\max\left(2|\ln t|, \left|\ln\left(a+t^2\right)\right|\right)}{(1+t^2)}$$

On montre que f est de classe C^1 sur $J =]0, +\infty[$ en dominant sur tout segment $[a, b]$ ainsi :

$$\forall x \in [a, b], \forall t > 0, \left| \frac{1}{(1+t^2)(x+t^2)} \right| \leq \frac{1}{(1+t^2)(a+t^2)}$$

Pour $a \neq 1$:

$$\frac{1}{(X+1)(X+a)} = \frac{1}{a-1} \left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{X+a} \right)$$

D'où :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x+t^2} \right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

En intégrant :

$$\forall x \geq, f(x) = \pi.\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + f(0) = \pi.\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$$

4 $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1- Déterminer le domaine de définition de f.

2- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.

3- Montrer que f admet un prolongement continu sur $]0, +\infty[$; préciser $f(1)$.

4- Montrer que ce prolongement est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

5- f est-elle convexe ?

6- Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Réponse

2-

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\,,\ f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

3- Soit

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$$

On montre que $t \to \frac{1}{t-1} - \frac{1}{\ln t}$ a une limite finie en 1 ; on en déduit que $\lim_1 f - g = 0$; d'où

$$\lim_1 f = \ln 2$$

Autre méthode :

$$\forall x > 1, f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_x^{x^2} t.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{t}.\ln t}$$

D'où :

$$\forall x > 1,\ x.\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{t}.\ln t} = x.\ln 2 \leq f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leq x^2.\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{t}.\ln t} = x^2.\ln 2$$

Analogue pour $x \in]0,1[$.

6- Avec une intégration par parties :

$$f(x) \sim \frac{x^2}{2.\ln(x)}$$

5 $\int_0^{2\pi} \ln\left(1 + a^2 - 2a.\cos t\right) \mathrm{d}t$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $I(a) = \int_0^{2\pi} \ln\left(1 + a^2 - 2a.\cos t\right) \mathrm{d}t$

1- Etudier l'existence.

2- Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, I(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + a^2 - 2a.\cos t\right) \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \ln\left(1 + a^2 - 2a.\cos t\right) \mathrm{d}t$$

3- Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, I(a) = I(-a)$.

4- Pour $|a| \neq 1$, trouver une relation entre $I(a)$ et $I\left(a^2\right)$.

5- Pour $|a| < 1$, calculer $I(a)$.

6- Pour $|a| > 1$, trouver une relation entre $I(a)$ et $I\left(\frac{1}{a}\right)$. Calculer $I(a)$.

Réponse

On notera $f(t) = 1 + a^2 - 2a.\cos t$ et $g(t) = \ln(f(t))$.

1-

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1 + a^2 - 2a.\cos t = (1 - a.\cos t)^2 + a^2.\sin^2 t = \left|1 - a.e^{it}\right|^2$$

Donc, pour $|a| \neq 1$, $f > 0$ sur $\mathbb{R}$; donc g est continue sur $[0, 2\pi]$.

Pour $|a| = 1$, on montre que g est intégrable ; donc, dans tous les cas, $I(a)$ existe.

4- En écrivant

$$\left|1 - a^2.e^{it}\right| = \left|1 - a.e^{i\frac{t}{2}}\right|.\left|1 + a.e^{i\frac{t}{2}}\right|$$

on montre que $I\left(a^2\right) = 2.I(a)$.

5- On montre d'abord que I est continue au point 0.

Ensuite, si $|a| < 1$:

$$\forall n \geq 0, I(a) = I\left(a^{2^n}\right) = I(0) = 0$$

6- Si $|a| > 1$:

$$I(a) = I\left(\frac{1}{a}\right) + 4\pi.\ln a$$

On en déduit

$$I(a) = 4\pi.\ln a$$

6 $\left(P_t f\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) f(y)\,\mathrm{d}y$

On note $E = C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues de limite nulle en $\pm\infty$.

Pour $t > 0$ et $f \in E$, on pose

$$\left(P_t f\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) f(y)\,\mathrm{d}y$$

1- Montrer que $P_t(f)$ est bien défini.

2- Montrer que E est stable par P_t.

3- Montrer que P_t est une application linéaire continue.

4- Montrer que pour tout réel x :

$$\lim_{t \to 0} P_t(f)(x) = f(x)$$

5- A quoi P_t peut-il bien servir ?

6- Montrer que

$$\forall s > 0, \forall t > 0, P_t \circ P_s = P_{s+t}$$

Réponse

2- Par changement de variable :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(P_t f\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) f\left(x + u\sqrt{t}\right) \mathrm{d}u$$

Il y a une domination évidente :

$$\varphi(u) = \|f\|_\infty . e^{-\frac{u^2}{4}}$$

On en déduit facilement que $P_t f \in E$.

3- P_t est clairement linéaire et :

$$\forall f \in E, \|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

4- Même méthode que 2.

5-

$$P : (t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} . \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

est appelé noyau de la chaleur ; il vérifie

$$\partial_1 P - \partial_2^2 P = 0$$

On constate que $P_t(f) = P(t, .) * f$.

On prolonge ainsi f en une solution de $\partial_1 f - \partial_2^2 f = 0$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

7 $f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xt)}{1+x^2} \mathrm{d}x$

Soit

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xt)}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

1- Calculer $f(0)$.

2- Trouver le domaine de définition I de f.

3- Montrer que f est continue sur I.

4- Montrer que $f'' = f$ sur $\mathbb{R}^*$.

5- Calculer f.

Indications

1- $f(0) = \pi$.
3- f est continue sur $I = \mathbb{R}$; domination par $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
4- Le théorème de dérivation ne s'applique pas directement, mais avec une intégration par parties :

$$\forall t > 0,\ t.f(t) = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{x.\sin(xt)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

Sous cette forme, le théorème de dérivation s'applique ; on dérive et on obtient :

$$\forall t > 0,\ t.f'(t) + f(t) = 2f(t) - 2\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xt)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

On dérive à nouveau.
5-

$$\forall t \geq 0,\ f(t) = A.e^{t} + B.e^{-t}$$

De plus, f est bornée et paire ; finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \pi.e^{-|t|}$$