Séries entières

1 Fonctions impaires

On suppose que f est impaire sur $I =]-R, R[$ $(R > 0)$, et que

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$$

Montrer que : $\forall n \geq 0, a_{2n} = 0$.

Réponse

On montre par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$, $f^{(2n)}$ est impaire ; il en découle que

$$\forall n \geq 0, a_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = 0$$

2 Ne s'annule pas sur D

Soit (a_n) une suite de réels strictement positive et décroissante ; soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . z^n$.

Montrer que $R \geq 1$ et que f ne s'annule pas sur

$$D = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| < 1\}$$

Indications

Pour $x = 1$, $(a_n . x^n) = (a_n)$ est bornée (par a_0) ; donc $R \geq 1$.

Notons $u_n = a_n - a_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = a_0$. Soit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . z^n$$

Soit $z \in D$. On constate que

$$(1 - z) f(z) = g(z)$$

Il suffit donc de montrer que $g(z) \neq 0$; or :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n . z^n \right| \leq |z| . \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |z| . \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| = (a_0 - L) . |z| < a_0$$

où L désigne la limite de (a_n). Donc

$$|g(z)| \geq a_0 - \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n . z^n \right| > 0$$

3 Un théorème de Tauber

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

On suppose que $R \geq 1$ et que f possède une limite finie L en 1^-.

Soit (H) l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$(H): \lim_{n} n.a_n = 0$$

On veut montrer que

$$(C): \sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$$

1- Montrer (C) dans le cas particulier où les a_n sont des réels positifs.
2- Montrer que sans (H), la conclusion (C) peut ne pas être vérifiée.
3- Montrer (C) avec l'hypothèse (H) en étudiant

$$f\left(1-\frac{1}{n}\right) - S_n$$

où

$$S_n = s_n(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Indications

1- Un exercice vu en cours montre que $\sum a_n$ converge, car sinon

$$\lim_{1} f = +\infty$$

Ensuite, la série converge normalement sur $[0,1]$.
2- $a_n = (-1)^n$
3-

$$\forall n \geq 1,\ S_n - s_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)$$

Or, d'après le TAF appliqué à $x \to x^k$:

$$\left|1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right| \leq \frac{k}{n}$$

Donc

$$\forall n \geq 1,\ \left|S_n - s_n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\,|a_k|$$

qui tend vers 0 d'après... ?
Ensuite, on étudie

$$f\left(1-\frac{1}{n}\right) - s_n\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Notons

$$M_n = \sup_{k\geq n} k\,|a_k|$$

$$\forall n \geq 1,\ \left|f\left(1-\frac{1}{n}\right) - s_n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \leq \frac{M_n}{n}.\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

D'où

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \leq \frac{M_n}{n}.\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = M_n$$

qui tend aussi vers 0.

4 L'égalité de Parseval

Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

1- On suppose

$$0 < r < R_a$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(r.e^{it}\right) \right|^2 \mathrm{d}t$$

2- En déduire que si $|f|$ admet un maximum local en 0, f est constante.
3- On suppose $R_a \geq 1$, les a_n dans $\mathbb{Z}$, et f bornée sur $D(0,1)$. Montrer que f est polynomiale.

Indications

1- A l'aide de la convergence normale sur le segment :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) \overline{f\left(re^{it}\right)} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int} \mathrm{d}t$$

Une deuxième fois, vu en cours :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int} \mathrm{d}t = a_n r^n$$

2- Pour r suffisamment proche de 0 :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(r.e^{it}\right) \right|^2 - |f(0)|^2 \mathrm{d}t \leq 0$$

3- On fixe $n_0 \geq 1$.

$$\forall r \in [0,1[\,,\ 0 \leq \sum_{n=0}^{n_0} |a_n|^2 r^{2n} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(r.e^{it}\right) \right|^2 \mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty^2$$

Avec $r \to 1$:

$$0 \leq \sum_{n=0}^{n_0} |a_n|^2 \leq \|f\|_\infty^2$$

Donc (a_n) est nulle à partir d'un certain rang.

5 La formule de Cauchy

Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

On suppose

$$|z_0| < r < R_a$$

On note C_r le cercle de centre 0 et rayon r. Montrer que

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

ce qui signifie

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(r.e^{it}\right)}{r.e^{it} - z_0} ire^{it} \mathrm{d}t$$

Indications

On sait que

$$\forall n \geq 0,\ 2\pi.r^n a_n = \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int}\mathrm{d}t$$

D'où

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) \left(\frac{z_0.e^{-it}}{r}\right)^n \mathrm{d}t$$

La convergence normale sur un segment permet de permuter série et intégrale et conduit au résultat.

6 Séries entières et convergence uniforme

Soit $R > 0$. Soit (f_n) une suite de fonctions développables en série entière sur $D = D(0, R)$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur D.

Montrer que f est développable en série entière sur D.

Indications

Utiliser la formule de Cauchy.

7 Injective sur D

Soit (a_n) une suite de réels ; soit

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.z^n$$

On suppose $a_1 = 1$, $R \geq 1$ et f injective sur $D = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| < 1\}$. Soit $z \in D$.

1- Montrer que $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f(z) \in \mathbb{R}$.

2- Montrer que $\operatorname{Im} z > 0 \implies \operatorname{Im} f(z) > 0$.

3- Soit $r \in \left]0, 1\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$a_n = \frac{2}{\pi r^n} \int_0^{\pi} \operatorname{Im} f\left(r.e^{it}\right).\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

4- Montrer que

$$\forall t \in [0, \pi], \forall n \in \mathbb{N},\ \sin(nt) \leq n.\sin(t)$$

5- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leq n$$

6- Montrer que $(a_n) = (n)$ vérifie les hypothèses de l'exercice.

Indications

1- Remarquer que $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

2- Examiner $\operatorname{Im} f(z)$ pour $z = \mathrm{i}t$, avec $t \to 0^+$.

8 Suite de polynômes dans $\mathbb{R}^+[X]$

Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients positifs. On suppose que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

Montrer que f est somme d'une série entière sur $\mathbb{R}$.

Indications

On note

$$P_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} X^k$$

On montre que pour chaque k, $(a_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass, puis le procédé diagonal...