Convexes

1 Adhérence et intérieur

Dans un espace vectoriel normé E, montrer que l'adhérence et l'intérieur d'un convexe sont convexes.

2 Racines des polynômes

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

1- Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.

2- Montrer que toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P.

3- Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $c \in [a, b]$, A l'ensemble des racines de $P - a$, B l'ensemble des racines de $P - b$, C l'ensemble des racines de $P - c$.

Montrer que C est contenu dans l'enveloppe convexe de $A \cup B$.

4- Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ non constants scindés. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que

$$P'Q + \lambda P.Q'$$

est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Indications pour c

$P - a = \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j)$, $P - b = \prod_{j=1}^{n} (X - \beta_j)$. $c = (1-t)a + tb$. $-\frac{c-a}{c-b} = \frac{t}{1-t} = \gamma > 0$.
Si $P(z) = c$:

$$P'(z) = (c-a)\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \alpha_j} = (c-b)\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \beta_j}$$

3 Points extremaux

Soit K un convexe non vide de E EVN, a un élément de K. On dit que a est un point extrémal de K si $K \setminus \{a\}$ est convexe.

1- Montrer que a n'est pas un point extrémal de K si et seulement si a est le milieu de deux points distincts de K.

2- Chercher les points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ pour les différentes normes usuelles.

3- Montrer que si a est dans l'intérieur de K, a n'est pas extrémal.

4- Donner un exemple de point frontière non extrémal.

5- Chercher les points extrémaux d'une boule fermée dans un espace préhilbertien.

6- Soit K un convexe compact non vide de E espace euclidien ; on veut montrer que K possède au moins un point extrémal ; on fixe $a \in E \setminus K$; montrer l'existence de $b \in K$ tel que

$$r = \|b - a\| = \max_{x \in K} \|x - a\|$$

Montrer que b est un point extrémal de K.

Que dire dans le cas où E est de dimension finie, mais pas euclidien ?

7- Ici $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Chercher les points extrémaux de la boule unité fermée pour $\|\|_2$.

8- Même question avec $\|\|_\infty$.

9- Même question avec $\|\|_1$.

Indications

6- Avec 5, b n'est pas le milieu de deux points distincts de $\overline{B}(a,r)$, a fortiori b n'est pas le milieu de deux points distincts de K.

7- voir 5.

8- On va montrer que les constantes 1 et -1 sont les seuls points extrémaux. Soit donc $f \in E$; alors :

$$f = \frac{1}{2}(f+h) + \frac{1}{2}(f-h)$$

avec

$$h = \min(|f-1|, |f+1|) = 1 - |f|$$

9- Soit $f \in E \setminus \{0\}$; soit J un segment non trivial sur lequel $f > 0$ (par exemple) ; soit h à support dans J, d'intégrale nulle et telle que

$$\|h\|_\infty \leq \min_J f$$

f est le milieu de $f+h$ et $f-h$ et on en déduit que B n'a aucun point extrémal.

4 Convexes denses

Soit C une partie convexe, dense dans un espace vectoriel normé E.

1- On suppose que $E = \mathbb{R}$. Montrer que $C = E$.

2- On suppose que $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que $C = E$.

3- On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $C = E$.

4- Que dire si E n'est pas de dimension finie ?

Indications

3- Montrer qu'il existe une base de E contenue dans C, un élément de C à coordonnées strictement négatives, et en déduire que $0 \in C$.

5 Convexes non bornés

Soit C une partie convexe, non bornée, fermée d'un espace normé E de dimension finie.

Montrer que C contient une demi-droite.

Indications

On peut supposer que $0 \in C$; soit (u_n) une suite d'éléments de C telle que $\lim\limits_n \|u_n\| = +\infty$.

Soit $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$; quitte à extraire, on peut supposer que (v_n) converge. Soit v sa limite. Montrons que

$$(\mathbb{R}+).v \subset C$$

Soit donc $\lambda \geq 0$.

$\lambda v \in C$ car c'est la limite de $(\lambda.v_n)$, suite d'éléments qui sont dans C à partir d'un certain rang.

6 $C \subset D \subset \overline{C}$

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Soit D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$.

Montrer que D est connexe par arcs.