Produits scalaires

1 $(F+G)^{\perp}$

Soit E un espace préhilbertien, F et G deux sous-espaces.

1- Montrer que si $F \subset G$, alors $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

2- Montrer que
$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

3- On suppose E de dimension finie. Montrer que
$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$$

4- On ne suppose pas E de dimension finie. Montrer que
$$F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$$
et donner un exemple où il n'y a pas égalité.

Indications

4- On a vu en cours deux exemples d'hyperplans H tels que
$$H^{\perp} = \{0\}$$
Dans ce cas, soit D un supplémentaire de H dans E.
$$H^{\perp} + D^{\perp} = D^{\perp} \neq E = \{0\}^{\perp} = (H \cap D)^{\perp}$$
Au fait, pourquoi $D^{\perp} \neq E$?

Car D est de dimension finie, donc $D^{\perp}$ est un supplémentaire de D dans E.

2 $\int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t$

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et
$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P.Q$$

1- Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2- Trouver a et b réels tels que $\int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t$ soit minimal.

Indications

On résout le système
$$\left\{ \begin{array}{c} X^2 - aX - b \perp 1 \\ X^2 - aX - b \perp X \end{array} \right.$$
On obtient $a = 1$, $b = -\frac{1}{6}$.

3 Polynômes de Hermite I

Soit $E=\mathbb{R}[X]$.

1- Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E par

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

2- Montrer l'existence d'une suite de polynômes (H_n) vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall t\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,t^n=\exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right)$$

Expliciter H_n ; degré ? Terme dominant ?

3- Montrer que

$$H_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}.e^{\frac{x^2}{2}}.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

4- Montrer que la suite (H_n) est orthogonale pour le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Indications

1- On notera $\omega(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.

2- On utilise le produit de Cauchy de $\exp(tx)$ par $\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)=\omega(t)$; on obtient

$$H_n(x)=\sum_{2q\leq n}(-1)^q\,\frac{x^{n-2q}}{2^q q!\,(n-2q)!}=\sum_{q=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^q\,\frac{x^{n-2q}}{2^q q!\,(n-2q)!}$$

Donc le terme dominant est

$$\frac{X^n}{n!}$$

3- Fixons un réel x. On va noter

$$f_x:t\to\exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right)$$

On sait que

$$H_n(x)=\frac{1}{n!}.f_x^{(n)}(0)$$

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f_x(t)=\exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}(t-x)^2+\frac{1}{2}x^2\right)=e^{\frac{x^2}{2}}.\exp\left(-\frac{1}{2}(t-x)^2\right)$$

Donc

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right)=e^{\frac{x^2}{2}}.\omega(x-t)$$

Il reste à dériver n fois par rapport à t :

$$H_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}.e^{-\frac{x^2}{2}}.\omega^{(n)}(x)$$

4- Supposons $0\leq p<q$.

$$(-1)^q\,q!\,\langle H_p,H_q\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)\,\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

On effectue alors $p+1$ intégrations par parties, et on obtient $\langle H_p,H_q\rangle=0$.

4 Polynômes de Hermite II

Soit $n \geq 1$ et $E_n = \mathbb{R}_n [X]$; on pose

$$f(P) = 2XP' - P''$$

1- Montrer que f est un endomorphisme de E_n.
2- Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E_n par

$$\langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(t) Q(t) e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

3- Montrer que f est symétrique pour ce produit scalaire.
4- Déterminer les valeurs propres de f.
5- f est-il diagonalisable ?
6- Montrer que l'orthonormalisée de la base canonique est une base de vecteurs propres de f.

Indications

3- Calculer la dérivée de

$$g : t \to (P(t) Q'(t) - P'(t) Q(t)) e^{-t^2}$$

Ensuite on écrit

$$0 = [g]_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} g'$$

4- La matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure.

$$\mathrm{Sp}(f) = (0, 2, 4, ..., 2n)$$

5- Oui car f est symétrique ; ou car le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
6- E_{n-1} est stable par f, et f symétrique ; donc l'orthogonal de E_{n-1} est également stable par f ; c'est donc une droite de vecteurs propres de f.

5 Convergence faible

Soit E un espace préhilbertien. Pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on dit que
- (x_n) converge fortement vers $x \in E$ si $\lim\limits_n \|x_n - x\| = 0$
- (x_n) converge faiblement vers $x \in E$ si, pour tout élément y de E,

$$\lim_n \langle x_n - x, y \rangle = 0$$

1- Montrer l'unicité de la limite pour la convergence faible.
2- Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
3- Montrer l'équivalence entre
(a) : (x_n) converge fortement vers x.
(b) : (x_n) converge faiblement vers x et $\lim\limits_n \|x_n\| = \|x\|$.
4- Montrer que si E est de dimension finie, les deux types de convergence sont équivalentes.
5- Montrer que ce n'est pas toujours le cas.

Indications

4- Utiliser une base orthonormée.
5- $E = \mathbb{R}[X]$, le produit scalaire canonique, et $x_n = X^n$.

6 Bornée selon une direction

Soit E un espace préhilbertien et A une partie de E ; on considère la propiété suivante :

$$(P) : \forall e \in E, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |\langle e, x \rangle| \leq m$$

1- Montrer que si A est bornée, A vérifie (P).
2- Montrer que si E est de dimension finie et A vérifie (P), alors A est bornée.
3- Trouver dans $\mathbb{R}[X]$ (produit scalaire canonique) une partie non bornée vérifiant (P).

Indications

1- Supposons A bornée ; soit M tel que

$$\forall x \in A, \|x\| \leq M$$

Alors :

$$\forall e \in E, \forall x \in A, |\langle e, x\rangle| \leq M. \|e\|$$

majorant indépendant de x.

2- Soit $(e_1, e_2, ...e_n)$ une base orthonormée de E ; par hypothèse :

$$\forall j, \exists m_j \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |\langle e_j, x\rangle| \leq m_j$$

D'où

$$\forall x \in A, \|x\|^2 \leq M = \sum_{j=1}^{n} m_j^2$$

3- Choisir pour A l'ensemble des polynômes dont tous les coefficients sont dans $[0, 1]$.

7 n vecteurs distincts

Soit $v_1, ..., v_n$ n vecteurs de $E = \mathbb{R}^n$.

1- Montrer que

$$\operatorname{rg}(v_i - v_j)_{1 \leq i < j \leq n} \leq n - 1$$

2- On note H_k le sous-espace d'équation $x_k = 0$. On suppose que $v_1, ..., v_n$ sont distincts. Montrer qu'il existe k tel que les projections orthogonales des v_j sur H_k soient distinctes.

Indications

1-

$$\forall i, j,\ v_i - v_j = (v_1 - v_j) - (v_1 - v_i)$$

2- Notons $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de E, $D_k = \mathbb{R}e_k = H_k^{\perp}$, et p_k la projection orthogonale sur H_k.

Si $i \neq j$ et $p_k(v_i) = p_k(v_j)$, alors $v_i - v_j$ est un vecteur non nul de D_k.

D'après la question 1, il ne peut pas exister un $v_i - v_j$ sur tous les $D_k \setminus \{0\}$.

8 Un calcul de minimum

Notations, pour $n \geq 1$:

$$f_n(u_1, ..., u_n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}. (1 + u_1 x + ... + u_n x^n)^2 \, \mathrm{d}x$$

$$N_0 = L_0 = 1,\ N_n = \prod_{j=1}^{n} (X + j)\,,\ \ L_n = \prod_{j=1}^{n} (X - j)$$

$$m_n = \min_{\mathbb{R}^n} f_n$$

1- Montrer que f_n est définie sur $\mathbb{R}^n$.

2- Calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \mathrm{d}x$$

3- Montrer que m_n est atteint en un point unique $a = (a_1, ..., a_n)$. On notera $a_0 = 1$ et

$$H_n = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$$

4- Montrer que (m_n) est décroissante.

Désormais n est fixé.

5- Montrer que

$$\forall j \in [\![1, n]\!] , \sum_{k=0}^{n} a_k. (k+j)! = 0$$

6- Soit

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k$$

Montrer que

$$Q_n = a_n L_n$$

7- A l'aide de $Q_n(-1)$, montrer que

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$$

8- A l'aide de $Q_n(0)$, montrer que

$$m_n = \frac{1}{n+1}$$

Indications

2- $n!$

3- On définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x} \mathrm{d}x$$

On note

$$F_n = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, ..., X^n\right)$$

m_n est le carré de la distance entre $P_0 = 1$ et F_n.

4- Notons P_n le projeté orthogonal de P_0 sur F_n. Soit $n \geq 2$. Evidemment

$$P_{n-1} \in F_n$$

Donc

$$m_{n-1} = \|P_0 - P_{n-1}\|^2 \geq \|P_0 - P_n\|^2 = m_n$$

5- $H_n = P_0 - P_n$ est orthogonal à X^j pour $1 \leq j \leq n$.

6- Mêmes racines et même terme dominant.

7-

$$1 = a_0 = Q_n(-1) = a_n L_n(-1) = a_n (-1)^n (n+1)!$$

8- Remarquer que

$$m_n = \langle H_n, H_n \rangle = \langle 1, H_n \rangle$$

On utilise $Q_n(0)$:

$$Q_n(0) = a_n.L_n(0) = (-)^n .a_n.n!$$

et

$$Q_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k.k! = \langle 1, H_n \rangle$$

Donc

$$m_n = \langle 1, H_n \rangle = (-)^n .a_n.n! = \frac{1}{n+1}$$

9 $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k)$

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $a_0,...,a_n$ des réels ; pour $P,Q\in E$, on pose

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k)$$

1. A quelle condition définit-on ainsi un produit scalaire sur E ?
2. Soit

$$F=\left\{P\in E/\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k)=0\right\}$$

Déterminer l'orthogonal de F.

3. Quelle est la distance de X^n à F ?

Indications

1. $a_0,...,a_n$ distincts.
2. Soit $Q=1$ et D la droite engendrée par Q.

$$F=\left\{P\in E/\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k)=0\right\}=\left\{P\in E/\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k)=0\right\}$$

Donc

$$F=\{P\in E/\ \langle P,Q\rangle=0\}$$

Donc F est l'orthogonal de D :

$$F=D^{\perp}$$

E étant de dimension finie, on sait que $D^{\perp\perp}=D$.

Conclusion :

$$F^{\perp}=D$$

3. Soit $Q_1=\frac{Q}{\|Q\|}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

$$d(X^n,F)=|\langle X^n,Q_1\rangle|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left|\sum_{j=0}^{n} a_j^n\right|$$

10 $M\to A.M.A^T$

On note $E=S_n(\mathbb{R})$; on fixe $A\in M_n(\mathbb{R})$; soit

$$\begin{array}{cccc}\phi: & E & \to & E\\ & M & \to & A.M.A^T\end{array}$$

1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Donner une CNS pour que ϕ soit un automorphisme.
3. On suppose A diagonale ; montrer que $\det\phi=(\det A)^{n+1}$.
4. On munit E du produit scalaire $(U,V)\to \mathrm{tr}UV$.
A quelle condition sur A, ϕ est-il orthogonal ?
5. En déduire $\det\phi$ si $A\in SO_n(\mathbb{R})$.

Indications

1. On n'oublie pas de vérifier que E est stable par ϕ.
2. Si A est inversible, $\ker\phi=\{0\}$, donc ϕ bijectif. Sinon, $\mathrm{Im}\phi$ ne contient que des matrices de déterminant nul, donc ϕ n'est pas surjectif.
3. Dans ce cas, ϕ est diagonalisable (utiliser des matrices symétriques simples).
4. Notons $B=A^T.A$; remarquons que $B\in E$.

Supposons que $\phi \in O(E)$; on a successivement :

$$\forall M, N \in E, \langle M, N \rangle = \langle \phi(M), \phi(N) \rangle$$

$$\forall M, N \in E, \operatorname{tr}(M.N) = \operatorname{tr}\left(A.M.A^T.A.N.A^T\right)$$

$$\forall M, N \in E, \operatorname{tr}(M.N) = \operatorname{tr}(B.M.B.N)$$

$$\forall M \in E, \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(B.M.B) = \operatorname{tr}\left(B^2.M\right)$$

$$\forall M \in E, \left\langle B^2 - I_n, M \right\rangle = 0$$

Donc $B^2 = I_n$; or B est symétrique positive, donc n'a que des valeurs propres positives.

Conclusion : $B = I_n$, $A \in O_n(\mathbb{R})$; la réciproque est facile.

5. $\det\phi = \pm 1$; pour $A = I_n$, $\det\phi = 1$; $SO_n(\mathbb{R})$ étant connexe par arcs, on peut en déduire que $\det\phi$ vaut toujours 1.

11 $x \perp y \Longrightarrow f(x) \perp f(y)$

Soit E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ qui vérifie :

- $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x, y \in E,\ \|x\| = \|y\| \Rightarrow \|f(x)\| = \|f(y)\|$

Montrer les propriétés suivantes :

1- $\forall \lambda \in \mathbb{Q}, \forall x \in E,\ f(\lambda x) = \lambda.f(x)$

2- $\forall x, y \in E,\ x \perp y \Longrightarrow f(x) \perp f(y)$

3- f est bornée sur la boule unité fermée.

4- f est continue.

5- Conclure.