Groupes

1 $\langle f(A) \rangle$

Soit A une partie d'un groupe G et f un morphisme de groupes de G dans G'.
Comparer $\langle f(A) \rangle$ et $f(\langle A \rangle)$.

2 Partie stable

Soit G un groupe fini de cardinal n et H une partie non vide de G stable ; montrer que H est un sous-groupe de G.
Si G n'est pas fini ?

Indications

Soit a un élément de H ; on sait que $a^n = e$. On en déduit que $e \in H$ et que $a^{-1} = a^{n-1} \in H$.
Un contre-exemple : $\mathbb{N}$ est une partie non vide de $\mathbb{Z}$ stable, mais pas un sous-groupe.

3 Sous-groupes de $\mathbb{Q}$

1- Existe-t-il une partie finie génératrice de $\mathbb{Q}$?
2- Existe-t-il des sous-groupes stricts de $\mathbb{Q}$ non monogènes ?

4 Un groupe de torsion

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et G un groupe abélien tel que

$$\forall x \in G,\, x^n = e$$

Soit a un entier naturel. On note

$$G_a = \{x^a / x \in G\}$$

1- Montrer que G_a est un sous-groupe de G.
2- Soit a et b deux entiers naturels tels que $n = ab$ et $a \wedge b = 1$.
Montrer que G est isomorphe à $G_a \times G_b$.

5 Les isométries du cube

Soit G le groupe des isométries du cube.
1- Déterminer son cardinal.
2- Trouver un morphisme de groupes surjectif de G dans S_4.

Indications

Fixons un point A du cube. Soit

$$G_A = \{g \in G / g(A) = A\}$$

On montre que

$$|G| = |G_A| \,.\, |\mathrm{orb}(A)|$$

Pour déterminer $|G_A|$, on peut procéder de même, en étudiant

$$G_{A,B} = \{g \in G_A / g(B) = B\}$$

6 Un homomorphisme de S_4 sur S_3

Déterminer un homomorphisme non constant de S_4 sur S_3.

7 $f(xy) - f(x) f(y)$

Soit G un groupe, et f une application de G dans $\mathbb{C}^*$. On suppose que $f(xy) - f(x) f(y)$ est borné sur G^2.

Montrer que f est bornée, ou f est un morphisme de groupes.

Indications

Fixons a et b dans G. On a alors :

$$\forall x \in G, \ (f(ab) - f(a) f(b)) f(x) =$$
$$f(ab) f(x) - f(abx) + f(abx) - f(a) f(bx) + f(a)(f(bx) - f(b) f(x))$$

qui est bornée.

8 $I =]-1, 1[$

Existe-t-il une structure de groupe sur $I =]-1, 1[$?

Indications

On choisit une bijection f de $\mathbb{R}$ sur I et on définit une loi sur I telle que f soit un isomorphisme de groupes.

Par exemple, pour $f = \mathrm{th}$:

$$x * y = \frac{x+y}{1+x.y}$$

9 $S_k = S^k$

Soit G un groupe fini de cardinal n et S une partie non vide de G ; pour $k \geq 1$, on note S_k l'ensemble des produits de k éléments de S et a_k le cardinal de S_k.

$$S_k = \{s_1.s_2...s_k / \, s_1, ..., s_k \in S\}$$

1- Montrer que la suite (a_k) est croissante.

2- Montrer que si $a_k = a_{k+1}$, alors $a_{k+1} = a_{k+2}$.

3- Montrer que S_n est un sous-groupe de G.

Indications

2- supposons $a_k = a_{k+1}$; soit s un élément fixé de S ; alors :

$$S_{k+2} = S_{k+1}.S = s.S_k.S = s.S_{k+1}$$

3- On montre que $S_n \subset S_{2n}$ ainsi :

$$s_1...s_n = s^n.s_1...s_n$$

On en déduit que $S_{2n} = S_n$, d'où la stabilité de S_n.

10 Les sous-groupes discrets de $\mathbb{C}^*$

Soit G un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$; on suppose G discret, c'est-à-dire que pour tout élément $a \in G$, il existe un voisinage V de a tel que

$$V \cap G = \{a\}$$

1- Montrer que pour tout compact $K \subset \mathbb{C}^*$, $G \cap K$ est fini.

2- Montrer que $G \cap \mathbb{U}$ est cyclique.

3- On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit

$$X = \{|z| \, / z \in G\} \cap]1, +\infty[$$

Montrer que X admet un plus petit élément.

4- Décrire G.

11 Sous-groupes d'indice 2

Soit H un sous-groupe de G.

1- Si $x \in G \setminus H$ et $y \in G \setminus H$, que dire de $x.y$?

On suppose désormais que G est fini, et que

$$|G| = 2.|H|$$

2- Si $x \in G \setminus H$ et $y \in G \setminus H$, montrer que $x.y \in H$.

3- Montrer que

$$\forall a \in G,\, a.H.a^{-1} = H$$

On dit que H est distingué dans G.

12 Le groupe des quaternions

Soit G un groupe non commutatif de cardinal 8.

1- Montrer que G est engendré par deux éléments : $G = \langle a, b \rangle$, dont un au moins est d'ordre 4.

2- On suppose que les deux sont d'ordre 4. Trouver la table de G.

3- Trouver un morphisme f de G dans $SL_2(\mathbb{C})$ tel que

$$f(a) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\, f(b) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Indications

1- Penser que si tout élément est d'ordre 1 ou 2 le groupe est commutatif.

2- On note $G_a = \langle a \rangle$ et $G_b = \langle b \rangle$; vérifier que

$$x \to b.x$$

induit une bijection entre G_a et $G \setminus G_a$; en déduire $bab^{-1} = a^3$.

Montrer que si $G_a \cap G_b = \{e\}$ alors $|G| > 8$; en déduire que $G_a \cap G_b = a^2 = b^2$; déduire de là que $bab = a$.

13 Un groupe non abélien de cardinal 8

Soit G un groupe non commutatif de cardinal 8.

1- Montrer que G est engendré par deux éléments : $G = \langle a, b \rangle$, dont un au moins, a est d'ordre 4.

2- On suppose que b est d'ordre 2. Trouver la table de G.

3- Trouver un groupe connu isomorphe à G.

Indications

2- $bab^{-1} = a^3$ comme dans l'exercice précédent, donc ici :

$$bab = a^3$$

3- Le groupe des isométries du carré.

14 Les groupes de Prüfer

Soit p un nombre premier. Soit

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} / \exists k \in \mathbb{N},\, z^{p^k} = 1 \right\}$$

1- Montrer que G est un groupe.

2- Que dire de l'ordre des éléments de G ?

3- Montrer que G est infini et dénombrable.

4- Montrer qu'il n'existe pas de partie A finie génératrice de G.

5- Soit H un sous-groupe de G ; montrer que H est fini ou $G = H$.

Indications

3- G est l'union dénombrable des $\mathbb{U}_{p^k}$.
4- Examiner l'ensemble des ordres des éléments de A.
5- L'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que H contient un élément d'ordre p^k est majoré ou non.

15 Caractères des groupes abéliens finis

Si G est un groupe fini de cardinal n, on note $\hat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$.
1- Munir $\hat{G}$ d'une structure de groupe.
2- On suppose n premier. Montrer que G est cyclique. Décrire $\hat{G}$.
Désormais on suppose G abélien. On appelle E l'ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{C}$:

$$E = \mathbb{C}^G$$

3- Munir E d'une structure de $\mathbb{C}-$espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
4- Pour $a \in G$, on pose

$$T_a(f)(x) = f(a+x)$$

Montrer que $T_a \in L(E)$.
5- Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à tous les T_a.
6- En déduire que $\left|\hat{G}\right| \geq n$.
7- Montrer que si K est un corps, et si $g_1, ..., g_m$ sont des morphismes de groupes distincts d'un groupe G dans K^*, la famille $(g_1, ..., g_m)$ est libre dans K^G.
En déduire que

$$\left|\hat{G}\right| = n$$

8- Proposer sans démonstration un isomorphisme entre G et $\hat{\hat{G}}$.

16 Lemme de prolongement des caractères

Tous les groupes considérés ici sont finis et commutatifs.
1- Déterminer $\hat{G}$ si $G = \mathbb{U}_n$.
2- Montrer que si m divise n, tout caractère de $\mathbb{U}_m$ se prolonge en un caractère de $\mathbb{U}_n$.
3- Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes de G, χ_1 un caractère de H_1, χ_2 un caractère de H_2, tels que χ_1 et χ_2 coïncident sur $H_1 \cap H_2$.
Montrer qu'on peut les prolonger en un caractère de H_1H_2.
4- Soit H un sous-groupe strict de G et $\chi \in \hat{H}$; soit $a \in G \setminus H$; montrer que χ se prolonge en un caractère de $\langle a \rangle H$.
5- Soit H un sous-groupe strict de G et $\chi \in \hat{H}$; montrer que χ se prolonge en un caractère de G.
6- Montrer que G et $\hat{\hat{G}}$ sont canoniquement isomorphes.

17 Centralisateur dans S_n

Calculer le cardinal du centralisateur d'une involution dans S_n.

18 Conjugaison...

Soit G un groupe fini. On suppose que

$$\forall x, y \in G \setminus \{e\}, \exists g \in G, g.x = y.g$$

Montrer que le cardinal de G est au plus 2.

19 Cardinal du centre

Soit G un groupe fini non commutatif de cardinal m.
1- Montrer que

$$\operatorname{card} Z(G) \leq \frac{m}{4}$$

2- Montrer que la proportion de couples qui commutent est majorée par $\frac{5}{8}$.

20 Morphismes de groupes continus

Chercher les morphismes de groupes continus f d'un groupe G_1 dans un groupe G_2, dans les cas suivants :

1- de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2- de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$.
3- de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.
4- de $\mathbb{U}$ dans $]0,+\infty[$.
5- de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.
6- de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$.
7- de $\mathbb{R}$ dans $GL_n(\mathbb{R})$.
8- de $SL_n(\mathbb{R})$ dans $]0,+\infty[$.
9- de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $]0,+\infty[$.

Indications

1- Vu en cours.
$$f : t \to at$$
2- Se ramène au précédent à l'aide de exp ou ln.
$$f : t \to e^{at}$$
3- Se ramène au précédent à l'aide de exp ou ln.
$$f : t \to t^{\alpha}$$
4- On montre que la restriction de f à chaque $\mathbb{U}_n$ vaut 1. Puis
$$f = 1$$
5- On montre que f est dérivable, on dérive...
$$f : t \to e^{iat}$$
6- On applique 5 à
$$t \to f\left(e^{it}\right)$$
On obtient
$$f : z \to z^n \ (n \in \mathbb{Z})$$
7- Analoque à 5 ; vu en cours.
8- Pour simplifier un peu, on choisit $n = 2$.
Pour $\lambda > 0$:
$$\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
On en déduit que
$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
en faisant tendre λ vers 0 :
$$1 = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
En utilisant que $SL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les transvections, on montre ensuite que
$$f = 1$$
9- En utilisant 8, et les matrices diagonales $\mathrm{Diag}(t, 1, ..., 1)$ on trouve
$$f : M \to |\det(M)|^{\alpha}$$