Polynômes

1 $\sum \omega^k$

Soit $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$; calculer
$$s_k = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k$$

Réponse

On note
$$\omega_j = \exp\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)$$
Si k est un multiple de n, il est clair que $s_k = n$. Sinon :
$$s_k = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^k = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_k^j$$
Il s'agit de la somme d'une suite géométrique ; $\omega_k^n = 1$, donc $s_k = \frac{1-\omega_k^n}{1-\omega_k} = 0$.

2 $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$

Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$?

Réponse

Supposons P non constant ; alors $Q = P - i$ est non constant et sans racines dans $\mathbb{C}$, impossible ; donc P est constant.

3 $(X+4).P(X) = X.P(X+1)$

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4).P(X) = X.P(X+1)$.

Réponse

On montre que 0 est racine de P, puis $-1, -2, -3$; on écrit P sous la forme
$$P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$$
On substitue dans l'équation, et on trouve que P est solution si et seulement si $Q = Q(X+1)$.

Lemme

Si $Q = Q(X+1)$, Q est constant.

Démonstration

Soit $R = Q - Q(0)$; on montre par récurrence sur n que pour tout entier n, $R(n) = 0$; R a une infinité de racines, donc $R = 0$, donc Q est constant.

Conclusion

Les solutions sont les
$$P = \lambda.X(X+1)(X+2)(X+3)$$
où λ décrit $\mathbb{R}$.

4 $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5}$

Soit $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5}$. Trouver un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.
Exprimer α à l'aide d'une racine carrée.

Indication

Utiliser la somme des éléments de $\mathbb{U}_5$. Utiliser $\beta = \cos\frac{4\pi}{5}$.

Réponse

$1 + 2\alpha + 2\beta = 0$; $P = 4X^2 + 2X - 1$; $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

5 Majoration des racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$; soit $M = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$; on suppose $a_n \neq 0$ et z racine de P. Montrer que

$$|z| \leq 1 + \frac{M}{|a_n|}$$

Réponse

Si $|z| \leq 1$, c'est clair ; si $|z| > 1$:

$$|a_n z^n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq M.\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k = M.\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \leq M.\frac{|z|^n}{|z| - 1}$$

En simplifiant par $|z|^n$: $|a_n| \leq \frac{M}{|z|-1}$, d'où le résultat.

6 Majoration des coefficients à l'aide d'une intégrale

Soit P un polynôme de coefficients a_k. Montrer que

$$\forall k \geq 0, |a_k| \leq \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

à l'aide de $I_k = \int_0^{2\pi} P\left(e^{it}\right) e^{-ikt} \mathrm{d}t$.

Réponse

Soit d le degré de P et $k \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{2\pi} P\left(e^{it}\right) e^{-ikt} \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{d} \int_0^{2\pi} a_p e^{ipt} e^{-ikt} \mathrm{d}t = 2\pi a_k$$

Or

$$\left|\int_0^{2\pi} P\left(e^{it}\right) e^{-ikt} \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|P\left(e^{it}\right) e^{-ikt}\right| \mathrm{d}t \leq 2\pi. \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

7 Majoration des coefficients à l'aide d'une somme finie

Soit P un polynôme de coefficients a_k et de degré $n-1$. Soit $M = \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|$. Soit ω_j les racines $n-$ièmes de l'unité.

1- Calculer $s = \sum_{j=0}^{n-1} P(\omega_j)$.
2- Montrer que $|a_0| \leq M$.
3- Montrer que $\forall k \geq 0, |a_k| \leq M$.
4- Soit $z_1, ..., z_n$ des complexes. Montrer que

$$\exists z \in \mathbb{U}, \prod_{j=1}^{n} |z - z_j| \geq 1$$

Indications

1- On trouve $s = n.a_0$.
2- $|n.a_0| = |s| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |P(\omega_j)| \leq nM$, d'où le résultat.
3- Pour $1 \leq k \leq n-1$, on effectue un calcul analogue avec le polynôme $P_k = X^k.P$ et on obtient $|a_{n-k}| \leq M$.
4- Le polynôme $P = \prod_{j=1}^{n} (X - z_j)$ est unitaire, donc $M_P \geq 1$ d'après 3.

8 $\prod (X - a_k) - 1$

Soit $n \geq 1$ et $a_1, ..., a_n$ n entiers relatifs distincts.
1- Soit
$$P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) - 1$$
Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2- Qu'en est-il de
$$\prod_{k=1}^{n} (X - a_k) + 1$$
3- Montrer que
$$\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^2 + 1$$
est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Indications

1- Supposons $P = QR$ dans $\mathbb{Z}[X]$ avec Q et R non constants.
On montre alors que
$$\forall k,\ Q(a_k) = -R(a_k) = \pm 1$$
puis $Q + R = 0$, enfin
$$P = -Q^2$$
et on en déduit une contradiction.
2- Dans le cas de $\prod_{k=1}^{n} (X - a_k) + 1$, on trouve des exemples très simples où il n'est pas irréductible.

9 $\exp(2i\pi P(n))$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que
$$\lim_{n} \exp(2i\pi P(n)) = 1$$
Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

10 Interpolation

Chercher tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant
$P(0) = 0, P(1) = 1, P'(0) = P'(1) = 0$.

Indications

C'est une équation linéaire ; on résout l'équation homogène $P(0) = 0, P(1) = 0, P'(0) = P'(1) = 0$; on trouve
$$P = X^2.(X-1)^2.Q$$
où Q décrit $\mathbb{R}[X]$.
On cherche une solution dans $\mathbb{R}_3[X]$:
$$P_0 = -2.X^3 + 3.X^2$$
Conclusion :
$$P = X^2.(X-1)^2.Q + P_0$$

11 Rationnels r tels que $\cos r\pi$ soit rationnel

On définit P_n par $P_0 = 2$, $P_1 = X$, et $P_{n+1} = X.P_n - P_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P_n\left(2.\cos t\right) = 2.\cos nt$$

Montrer que P_n est à coefficients entiers et est unitaire pour tout $n \geq 1$.

Soit r un rationnel tel que $\cos r\pi$ soit rationnel ; montrer que $|\cos r\pi| = 0{,}1$ ou $\frac{1}{2}$.

Indications

Supposons $\cos r\pi = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$.

$$P_q\left(2\cos r\pi\right) = 2.\cos p\pi = 2\left(-1\right)^p$$

Le polynôme $P_q - 2\left(-1\right)^p$ est à coefficients entiers et est unitaire ; donc si une de ses racines est rationnelle, elle est forcément entière ; donc :

$$2\cos r\pi \in \mathbb{Z}$$

D'où $|\cos r\pi| = 0{,}1$ ou $\frac{1}{2}$.

D'où le résultat.

12 $a + b + c = abc = |a| = |b| = |c| = 1$

Trouver les complexes a, b, c vérifiant

$$a + b + c = abc = |a| = |b| = |c| = 1$$

Indications

Vérifier que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$; en déduire que $ab + ac + bc = 1$.

Finalement a, b, c sont les racines de

$$P = X^3 - X^2 + X - 1 = \left(X - 1\right)\left(X^2 + 1\right)$$

13 Racines de $A = X^3 + X - 1$

Soit $A = X^3 + X - 1$ et a une racine de A ; a peut-il être réel ? entier ? rationnel ? zéro d'un polynôme B de degré 2 de $\mathbb{Q}\left[X\right]$?

Indications

- A a au moins une racine réelle, car son degré est impair ; une seule car A est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.
- Pas de racine entière car $A\left(0\right) = -1$ et $A\left(1\right) = 1$.
- On sait que si $r = \frac{p}{q}$ est racine de A, et si $p \wedge q = 1$, alors q divise 1 et p divise -1 ; donc les seules racines rationnelles possibles sont 1 et -1.

Conclusion, pas de racine rationnelle.

- Supposons a zéro d'un polynôme B de degré 2 de $\mathbb{Q}\left[X\right]$; $A = B.Q + R$ dans $\mathbb{Q}\left[X\right]$; $R \in \mathbb{Q}_1\left[X\right]$ et possède une racine a qui n'est pas rationnelle, donc $R = 0$. Donc $A = B.Q$; la racine rationnelle de Q est racine de A, contradiction.

14 $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^k$

Soit $n \geq 1$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$, $\mu_1, ..., \mu_n$ des complexes ; on note

$$s_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k,\ t_k = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^k$$

On supppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $s_k = t_k$; montrer que les λ_j et les μ_j sont les mêmes à permutation près.

Réponse

Par récurrence sur n ; c'est clair pour $n=1$.

On remarque que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \sum_{j=1}^{n} P(\lambda_j) = \sum_{j=1}^{n} P(\mu_j)$$

Supposons qu'un μ_p n'est pas dans la liste $\lambda_1, ..., \lambda_n$; soit P un polynôme dont les racines sont les λ_j, et les μ_j distincts de μ_p ; on obtient une contradiction.

Il y a donc au moins un élément commun aux deux listes ; on est alors ramené au même problème avec des listes de taille $n-1$.

15 $(P(X+a_k))$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n ; soit $a_0, ..., a_n$ des complexes distincts. Soit $P_k = P(X+a_k)$.

Montrer que $(P_k)_{0 \le k \le n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Indications

Avec la formule de Taylor :

$$P_k = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_k^j}{j!}.P^{(j)}$$

La famille $\left(P^{(j)}\right)_{0 \le j \le n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et la matrice de passage de $\left(P^{(j)}\right)_{0 \le j \le n}$ à $(P_k)_{0 \le k \le n}$ est inversible (on se ramène à un déterminant de Vandermonde).

Donc $(P_k)_{0 \le k \le n}$ est bien une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

16 $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$

Quels sont les $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ éléments de $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$? On pourra utiliser

$$Q = X^n \overline{P}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^{n-k}$$

Indications

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \ge 0$ tel que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$; soit $Q = X^n \overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$; soit $R = PQ$.

$$\forall u \in \mathbb{U}, R(u) = u^n P(u)\, \overline{P}(\overline{u}) = u^n P(u)\, \overline{P(u)} = u^n$$

R et X^n coïncident sur un ensemble infini, donc $R = X^n$; pour des raisons de degrés, Q est constant, et

$$P = a.X^n$$

avec $a \in \mathbb{U}$.

17 Polynomial par rapport à chaque variable

Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ polynomiale par rapport à chaque variable ; on veut montrer que f est polynomiale.

On note $g_x : y \to f(x,y)$ et $h_y : x \to f(x,y)$.

Pour $m \ge 0$, on note $E_m = \{x \in \mathbb{R} / \deg g_x \le m\}$.

1. Soit $x \in E_m$:

$$g_x(y) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x).y^k$$

Montrer l'existence de scalaires $(c_{k,j})_{0 \le k,j \le m}$ tels que :

$$\forall x \in E_m, \forall k \in [0,m], a_k(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x,j)\, c_{k,j}$$

2. En déduire l'existence de polynômes $(B_k)_{0\leq k\leq m}$ tels que :

$$\forall x\in E_m, \forall y\in\mathbb{R}, f(x,y)=\sum_{k=0}^{m} B_k(x)\, y^k$$

3. Conclure.

Indications

1. Utiliser le déterminant de Vandermonde $V(0,1,...,m)$.
2. La fonction

$$B_k=\sum_{j=0}^{m} h_j . c_{k,j}$$

est polynomiale puisque toutes les h_y le sont.

3. La réunion des E_m est $\mathbb{R}$ qui est non dénombrable, donc au moins l'un des E_m est infini. Alors il existe des polynômes (B_k) tels que :

$$\forall x\in E_m, \forall y\in\mathbb{R},\ f(x,y)=\sum_{k=0}^{m} B_k(x)\, y^k$$

Pour y fixé, ce sont deux fonctions polynomiales qui coïncident en chaque point de E_m qui est infini, donc qui coïncident sur $\mathbb{R}$.

18 $\sum \frac{P''(z_k)}{P'(z_k)}$

Soient $z_1,...,z_n$ n complexes distincts, et

$$P=\prod_{k=1}^{n}(X-z_k)$$

Calculer

$$s=\sum_{k=1}^{n}\frac{P''(z_k)}{P'(z_k)}$$

Indications

Ecrire

$$P'=n\prod_{j=1}^{n-1}(X-x_j)$$

On trouve $s=0$.

19 $xf'(x)=\frac{n}{2}.f(x)+\frac{2}{n}.\sum z\frac{f(xz)}{(1-z)^2}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on note

$$Z=\{z\in\mathbb{C}/\ z^n+1=0\}$$

Soit $f\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$; montrer que

$$xf'(x)=\frac{n}{2}.f(x)+\frac{2}{n}.\sum_{z\in Z} z\frac{f(xz)}{(1-z)^2}$$

Indications

Il suffit de le vérifier pour les monômes X^k.

Notons $P=X^n+1$, $Z=\{z_j/\ 1\leq j\leq n\}$ les racines de P, et

$$s_k=\sum_j \frac{z_j^k}{(1-z_j)^2}$$

On doit vérifier que $\frac{k}{2}-\frac{n}{4}=\frac{1}{n}.s_{k+1}$. On introduit

$$R_k=\frac{X^k}{P}=\sum_j\frac{\lambda_j}{X-z_j}$$

avec $\lambda_j = \frac{z_j^k}{P'(z_j)} = -\frac{1}{n}.z_j^{k+1}$. On calcule $R'_k(1)$ et on obtient :

$$\frac{k}{2} - \frac{n}{4} = \frac{1}{n}.s_{k+1}$$

20 $\sum_{k=1}^{n} P_k(x) e^{\alpha_k x}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P_1, ..., P_n \in \mathbb{R}[X]$ n polynômes non nuls, et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels distincts. On pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x) e^{\alpha_k x}$$

1- Montrer que f n'est pas la fonction nulle.
2- Même question en supposant que $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont des nombres complexes distincts.