Fonctions définies par une intégrale

1 Soit $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$; trouver le domaine de définition de f, puis l'étudier.

2 Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{tx}}{t} e^{-t}\,dt$; trouver le domaine de définition de f, puis expliciter $f(x)$.

3 $0 < a < b$. Soit $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{t}(e^{-at} - e^{-bt})\,dt$. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et $f(x)$.

4 Etudier $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}\,du$. (on peut montrer que $f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ mais ce n'est pas demandé).

5 Montrer que $\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = 1$ définit une fonction f sur $\mathbb{R}$. Etude, tracé.

6 Montrer que pour tout $x > 0$: $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t+1}\,dt = \Gamma(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

7 Montrer que si $x > 0$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$. Etudier la fonction ainsi définie.

8a Soit g périodique sur $\mathbb{R}$, on suppose $g(x)/x$ décroissante sur $]0,+\infty[$. Montrer que g est constante.

b Etudier $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t\,dt$. Montrer que $x\,f(x)\,f(x-1)$ est périodique, puis constant.

9 Calculer $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t}\,dt$ par deux méthodes (avec ou sans dérivation).

10 Soit $f(x) = \int_0^1 e^{t^2} \sin(xt)\frac{dt}{t}$. Trouver $\lim_{+\infty} f$.

11 Soit $h(x,t) = t^{x+1} + t + 1$, $f(x) = \int_1^{\infty} \frac{dt}{h(x,t)}$. Etudier f $(t^x = u)$.