Suites de réels

Contents

1 Retenez au moins ça

Soit a et b des réels positifs.

- $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$
- $(a+b)^2 \leq 2.\left(a^2 + b^2\right)$
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$
- $\min(a,b)$?

Soit a et b des réels.

- $|a| \leq b$ si et seulement si $a \leq b$ et $-a \leq b$

2 Borne supérieure

2.1 Définitions

2.1.1 Relation d'ordre sur un ensemble E

Relation réflexive, transitive, antisymétrique.

2.1.2 Ordre total

$\forall x, y \in E$, $x \leq y$ ou $y \leq x$

2.1.3 Majorant d'une partie A de E

$\forall x \in A, x \leq M$

2.1.4 Plus grand élément d'une partie A de E

Elément de A qui est un majorant de A.

Remarque

S'il existe, le plus grand élément de A est unique.

2.1.5 Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A, s'il existe.

Remarque

Si la borne supérieure existe, elle est unique.

2.1.6 Plus grand élément et borne supérieure

Si A possède un plus grand élément, c'est la borne supérieure de A.

2.2 Cas de $\mathbb{R}$

2.2.1 Existence de bornes supérieures

Théorème

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

2.2.2 Exemple

$A =]-\infty, 1[$; l'ensemble B des majorants de A est ...?

Réponse

$B = [1, +\infty[$; B possède un plus petit élément, 1, qui est donc la borne supérieure de A.

2.2.3 Plus généralement

Si A est non vide et majorée, l'ensemble B des majorants de A est ... ?

Réponse

$B = [s, +\infty[$.

2.2.4 Caractérisation

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$; s est la borne supérieure de A si et seulement si :
- $\forall x \in A, x \leq s$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \cap]s - \varepsilon, s]$

Remarque

La deuxième condition traduit le fait que $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.

2.2.5 Caractérisation séquentielle

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$; s est la borne supérieure de A si et seulement si :
- s est un majorant de A.
- Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers s.

2.3 Borne supérieure d'une fonction

2.3.1 Définition

Soit X un ensemble non vide, et f une application de X dans $\mathbb{R}$; on dit que f est majorée si $f(X)$ est majorée ; dans ce cas, on note $\sup f$ la borne supérieure de $f(X)$.

2.3.2 Théorème de passage à la borne supérieure

Si on suppose que : $\forall x \in X, f(x) \leq M$, alors : $\sup f \leq M$

Démonstration

M est un majorant, $\sup f$ est le plus petit des majorants.

Contre-exemple avec inégalité stricte

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

Mais il serait faux d'écrire

$$\sup \arctan < \tfrac{\pi}{2}$$

2.3.3 Borne supérieure d'une somme

Soit X un ensemble non vide, et f et g deux applications majorées de X dans $\mathbb{R}$; alors

$$\sup (f + g) \leq \sup f + \sup g$$

Démonstration

On va montrer que $\sup f + \sup g$ est un majorant de $f + g$:
$\forall x \in X, f(x) \leq \sup f$
$\forall x \in X, g(x) \leq \sup g$
D'où :

$$\forall x \in X, (f + g)(x) \leq \sup f + \sup g$$

Le nombre $M = \sup f + \sup g$ est donc un majorant de $f + g$; conclusion :

$$\sup (f + g) \leq M = \sup f + \sup g$$

Un cas où l'inégalité est stricte ?

Par exemple, $X = \mathbb{R}$,$f = \cos^2$, $g = \sin^2$.

2.3.4 De manière analogue

Si $\lambda \geq 0$, $\sup \lambda f = \lambda . \sup f$

Si f est minorée

$\sup(-f) = -\inf(f)$

2.4 Applications du théorème de la borne supérieure

Nombreuses !

2.4.1 Toute suite croissante et majorée converge

Démonstration

Notons M la borne supérieure de l'ensemble des termes ; fixons $\varepsilon > 0$; il existe alors n tel que :

$$M - \varepsilon \leq u_n \leq M$$

La suite étant croissante :

$$\forall p \geq n, M - \varepsilon \leq u_p \leq M \leq M + \varepsilon$$

2.4.2 Toute partie convexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle

Notation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; soit x et y deux éléments de E ; on note

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty / t \in [0, 1]\}$$

Définition

On dit qu'une partie A de E est convexe si :

$$\forall x, y \in A,\ [x, y] \subset A$$

Théorème

Les parties de $\mathbb{R}$ convexes sont exactement les intervalles.

2.4.3 Le théorème des valeurs intermédiaires

Enoncé

Soit f fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$; alors :

$$\exists c \in \left]a, b\right[, f(c) = 0$$

Démonstration

Soit

$$A = \{x \in [a,b] \,/\, f(x) \geq 0\}$$

Soit c la borne supérieure de A ; on sait qu'il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers c.

$$\forall n \geq 0, f(u_n) \geq 0$$

Par passage à la limite : $f(c) \geq 0$.

De manière analogue :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, f\left(c + \frac{1}{n}\right) < 0$$

Par passage à la limite : $f(c) \leq 0$.

Conclusion :

$$f(c) = 0$$

Où servent les hypothèses $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$? Que représente n_0 ?

2.5 Sous-groupes de $\mathbb{R}$

2.5.1 Définition d'un sous-groupe de $\mathbb{R}$

Partie G de $\mathbb{R}$ contenant 0, stable par l'addition, et contenant l'opposé de tout élément de G.

2.5.2 Exemples

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $a\mathbb{Z}$ où a est un réel ; $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$...

Les décimaux :

$$D = \left\{\frac{p}{10^n} / p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Les algébriques : les racines d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$.

2.5.3 Densité

Exercice

Soit H un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$; soit $H' = H \cap]0, +\infty[$; H' possède une borne inférieure a, et si $a = 0$, alors H est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Supposons $u < v$; soit $d = v - u$; soit $h \in H$ tel que $0 < h < d$; choisissons

$$n = \left\lfloor \frac{u}{h} \right\rfloor$$

et vérifions que

$$(n+1)\,h \in]u, v[$$

Par définition de la partie entière, $n \leq \frac{u}{h} < n + 1$; donc

$$nh \leq u < (n+1)\,h$$

Puis

$$u < (n+1)\,h \leq u + h < u + d = v$$

Conclusion :

on a montré que l'intervalle $]u, v[$ contient au moins un élément de H : $(n+1)\,h$.

2.5.4 Le cas de $H = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$

On note

$$\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \left\{p + q\sqrt{2} / p, q \in \mathbb{Z}\right\}$$

On utilise $u_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$; c'est une suite d'éléments de H strictement positifs, convergeant vers 0.

3 Suites de réels adjacentes

3.1 Définition

On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, et $\lim\limits_n u_n - v_n = 0$.

3.2 Convergence

Théorème

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Démonstration

$(v_n - u_n)$ est décroissante et tend vers 0, elle est donc positive ; donc, pour tout n : $u_n \leq v_n \leq v_0$.

(u_n) est donc croissante et majorée par v_0, donc converge.

De $\lim\limits_n u_n - v_n = 0$, on déduit que (v_n) converge aussi, et a la même limite.

3.3 Exemple 1

$u_0 > 0$, $v_0 > 0$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \sqrt{u_n . v_n}$; les deux suites sont-elles adjacentes ?

Réponse

Presque ! C'est vrai pour $n \geq 1$.

Démonstration

On montre d'abord aisément par récurrence que les deux suites sont bien définies et strictement positives ; ensuite on utilise le

Lemme

Si $0 < a \leq b$, alors

$$0 < a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

Il en découle que

$$\forall n \geq 1, v_n \leq u_n$$

$(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, $(v_n)_{n\geq 1}$ croissante.

Pour conclure

$$l = \frac{l + l'}{2}$$

donc $l = l'$.

3.4 Exemple 2 : e est irrationnel.

Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

a) Montrer que ce sont deux suites adjacentes.

b) Soit e leur limite commune ; montrer que e est irrationnel.

Démonstration

Supposons $e = \frac{p}{q}$, avec p, q entiers naturels ; on remarque que

$$u_q < \frac{p}{q} < v_q$$

On multiplie par $q!$, et on constate que...

$$q!u_q = N < p.(q-1)! < N + \frac{1}{q}$$

Contradiction car $N = q!u_q$ est un entier.

4 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

4.1 Généralités

4.1.1 Existence

Chercher des domaines (des intervalles en général) *stables* par f.

4.1.2 Monotonie

Si sur I stable par f, $f(x) \geq x$, que dire de (u_n) ?

Réponse

(u_n) est croissante.

Si I n'est pas stable par f ? Dans ce cas, on ne peut rien déduire.

4.1.3 Convergence

Si (u_n) converge vers a, et si f est continue au point a, que dire de a ?

Réponse

$f(a) = a$.

4.1.4 Cas où f est croissante

Si f est croissante sur I stable par f, que dire de (u_n) ?

Réponse

(u_n) est monotone. En effet :

- si $u_0 \leq u_1$, on montre par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- si $u_0 \geq u_1$, de même (u_n) est décroissante.

4.1.5 Cas où f est décroissante

Dans ce cas, $g = f \circ f$ est croissante. La suite $(v_n) = (u_{2n})$ vérifie

$$v_{n+1} = g(v_n)$$

Elle est donc monotone ; de même(u_{2n+1}) est monotone (et de sens contraire).

Mais (u_n) peut être divergente.

4.2 Un premier exemple : $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$

Ici, $f(x) = 1 + \sqrt{x}$; l'intervalle $I = [0, +\infty[$ est stable par f ; un seul point fixe :

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)$$

Cas où $u_0 \in J = [0, \alpha]$.

J est stable par f ; sur J, $f(x) \geq x$; la suite (u_n) est donc croissante, majorée par α ; donc elle converge ; f étant continue, elle ne peut converger que vers un point fixe de f : α.

Cas où $u_0 > \alpha$.

De manière analogue, on montre que (u_n) converge vers α.

4.3 Deuxième exemple : $u_{n+1} = 1 - u_n^2$

Il existe deux points fixes : $\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ et $\beta = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$

4.3.1 Cas où $u_0 < \beta$

L'intervalle $I =]-\infty, \beta[$ est stable par f ; on montre que (u_n) tend vers $-\infty$.

4.3.2 Cas où $u_0 > -\beta$

(u_n) tend vers $-\infty$.

4.3.3 Cas où $u_0 \in [0, 1]$

L'intervalle $I = [0, 1]$ est stable par f ; sur cet intervalle, f est décroissante ; il reste à étudier $g = f \circ f$.

On constate que $g(x) < x$ si $0 < x < \alpha$ et $g(x) > x$ si $\alpha < x < 1$.
Conclusion : dans ce cas, la suite (u_n) diverge, sauf si $u_0 = \alpha$.

4.3.4 Cas où $\beta < u_0 < -1$

Attention, $]\beta, -1[$ n'est pas stable ; par contre, $]\beta, 1]$ est stable par f ; on montre qu'à partir d'un certain rang, $u_n \in [0, 1]$.

4.4 L'algorithme de Héron

4.4.1 La méthode de Newton

$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

4.4.2 Application à $f(x) = x^2 - 2$

On obtient :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

On pose $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

4.4.3 Convergence

Montrons que pour $u_0 > 0$, la suite converge effectivement vers $a = \sqrt{2}$.

- L'intervalle $J = [a, +\infty[$ est stable par f.
- $\forall x \in J$, $g(x) \leq x$.
- g est continue sur J.
- a est le seul point fixe de g dans J.

Donc, pour $u_0 > a$, la suite est décroissante, minorée par a, donc converge, et ne peut converger que vers a.

4.4.4 L'inégalité de Taylor-Lagrange

Pour f de classe C^n $(n \geq 1)$:

$$f(a+h) = T_{n-1}(h) + R_n(h)$$

avec :

$$T_{n-1}(h) = \sum_{k=0}^{n-1} h^k.\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$|R_n(h)| \leq \frac{M_n}{n!}|h|^n$$

où

$$M_n = \sup_{[a,a+h]} \left|f^{(n)}\right|$$

Autre forme

$$\left|f(a+h) - \sum_{k=0}^{n-1} h^k.\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right| \leq \frac{M_n}{n!}|h|^n$$

4.4.5 L'inégalité de Taylor-Lagrange avec $n = 2$

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + R_2(h)$$

avec

$$|R_2(h)| \leq \frac{M_2}{2!}|h|^2$$

et $M_2 = \sup_{[a,a+h]} \left|f''\right|$.

Autre formulation :

$$|f(a+h) - f(a) - h.f'(a)| \leq \frac{M_2}{2!}|h|^2$$

4.4.6 Application à la rapidité de convergence

Ici, $a = \sqrt{2}$; $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$; $g'(a) = 0$; $u_{n+1} = g(u_n)$.

Avec la formule de Taylor-Lagrange :

$$|u_{n+1} - a| \leq M.|u_n - a|^2$$

Notons $v_n = M.|u_n - a|$; que dire de v_n ?

Réponse

$v_{n+1} \leq v_n^2$; d'où $v_n \leq v_0^{2^n}$; commentaire ?

5 Suites définies implicitement (par une équation)

5.1 $x = n.\ln x$

5.1.1 Définition

Pour $n \geq 3$, montrer qu'il existe deux réels u_n et v_n solutions de $x = n \ln x$ tels que $0 < u_n < v_n$.

Réponse

Fixons $n \geq 3$; soit $f_n : x \to x - n.\ln x$; on étudie les variations ; on trouve un minimum au point $x = n$.

5.1.2 (v_n)

Trouver la limite puis un équivalent de (v_n).

Réponse

$\forall n \geq 3, n < v_n$, donc (v_n) tend vers $+\infty$. $v_n = n.\ln v_n$, d'où :

$$\ln v_n = \ln n + \ln(\ln v_n)$$

Or $(\mathrm{ln} v_n)$ tend vers $+\infty$, donc $\ln(\mathrm{ln} v_n) = o(\mathrm{ln} v_n)$; d'où $\ln(v_n) \sim \ln n$.
Conclusion :

$$v_n \sim n.\ln n$$

5.1.3 Limite de (u_n)

Trouver la limite de (u_n), puis un développement asymptotique.

Réponse

Fixons $\varepsilon > 0$; soit $b = 1 + \varepsilon$; on examine $f_n(b)$:

$$f_n(b) = b - n.\mathrm{ln} b = 1 + \varepsilon - n.\mathrm{ln}(1+\varepsilon)$$

On constate que cette suite tend vers $-\infty$; donc, à partir d'un certain rang n_0, $f_n(b)$ est strictement négatif :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, f_n(b) < 0$$

Alors, d'après l'étude des variations :

$$\forall n \geq n_0, 1 < u_n < 1 + \varepsilon$$

Conclusion : (u_n) converge vers 1.

5.1.4 DA de (u_n)

On peut montrer que :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$$

Démonstration

On écrit

$$u_n = 1 + a_n$$

On remplace :

$$u_n = n.\mathrm{ln} u_n = n.\mathrm{ln}(1 + a_n) \sim n.a_n$$

car (a_n) tend vers 0 ; donc $a_n \sim \frac{1}{n}$; donc

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)$$

Ensuite

$$1 + a_n = n\left(a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o\left(a_n^2\right)\right)$$

$$1 = a_n\left(n - 1 - \frac{1}{2}n.a_n + o(1)\right)$$

Donc

$$1 = a_n\left(n - \frac{3}{2} + o(1)\right)$$

D'où l'on déduit que

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5.2 $x^n = x + n$

5.2.1 Existence et unicité

Pour $n > 1$, montrer l'existence et l'unicité de x_n racine strictement positive de l'équation

$$x^n = x + n$$

On notera

$$P_n(x) = x^n - x - n$$

5.2.2 Limite de (x_n)

On conjecture la limite a, puis on démontre :

Fixons $\varepsilon > 0$; soit $b = 1 + \varepsilon$.

$$\forall n > 1,\ P_n(b) = b^n - b - n$$

La suite $(P_n(b))$ tend vers ?

???

Vers $+\infty$ (croissances comparées) ; donc à partir d'un certain rang n_0, $P_n(b) > 0$; d'où, d'après l'étude des variations de P_n :

$$\forall n \geq n_0, 1 < x_n < 1 + \varepsilon = b$$

5.2.3 Etude plus poussée...

On cherche un développement asymptotique : $x_n = 1 + y_n$; équivalent de (y_n) ?

Réponse

$$\forall n > 1, (1 + y_n)^n = 1 + y_n + n$$

$$\forall n > 1, n.\ln(1 + y_n) = \ln(1 + y_n + n) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{y_n}{n}\right)$$

Donc

$$n.y_n \sim \ln n$$

Conclusion :

$y_n \sim \frac{\ln n}{n}$; ou encore :

$$x_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Remarque

Il est souvent préférable d'écrire :

$$x_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n}\varepsilon(n)$$

5.2.4 Et ensuite ?

On pourrait montrer que :

$$x_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 (1 + \varepsilon(n))$$

6 Complément : les suites sous-additives

On dit qu'une suite de réels est sous-additive si

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, u_{n+p} \leq u_n + u_p$$

6.1 Exemples de telles suites

(n), $(\sqrt{n})$, $\left(-n^2\right)$,...

6.2 Convergence

Soit (u_n) une suite sous-additive ; on suppose de plus $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ minorée.
Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge.

Démonstration

On note

$$L = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$$

On fixe $A > L$; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{u_{n_0}}{n_0} < A$$

L'existence de n_0 découle de la définition de la borne inférieure.
Pour $n \geq 1$, on écrit

$$n = n_0.q + r$$

D'où :

$$u_n \leq q.u_{n_0} + u_r$$

D'où :

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{q.n_0}{n}.\frac{u_{n_0}}{n_0} + \frac{u_r}{n} = \left(1 - \frac{r}{n}\right).\frac{u_{n_0}}{n_0} + \frac{u_r}{n} = \frac{u_{n_0}}{n_0} - \frac{r}{n}.\frac{u_{n_0}}{n_0} + \frac{u_r}{n} = \frac{u_{n_0}}{n_0} + \frac{1}{n}\left(u_r - r.\frac{u_{n_0}}{n_0}\right)$$

Or r ne prend qu'un nombre fini de valeurs : $0, 1, ..., n_0 - 1$. Donc il existe une constante C (qui dépend de n_0) telle que :

$$\forall n \geq 1,\ \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_{n_0}}{n_0} + \frac{C}{n}$$

Donc :

$$\exists n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1,\ \frac{u_n}{n} \leq A$$

6.3 Cas où (u_n) n'est pas minorée

Montrer de manière analogue que si $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ n'est pas minorée, elle tend vers $-\infty$.

Réponse

On remplace dans la démonstration précédente :
'On fixe $A > L$' par : 'On fixe $A \in \mathbb{R}$'

6.4 Application à des chemins

Soit v_n le nombre de chemins dans $\mathbb{Z}^2$ de longueur n, issus de l'origine, qui ne passent pas deux fois par le même point.

1- Montrer que

$$2^n \leq v_n \leq 4.3^{n-1}$$

2- Montrer que $\left(v_n^{\frac{1}{n}}\right)$ converge vers une limite $l \in [2, 3]$.

Indications

Soit $u_n = \ln v_n$; on montre que

$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ v_{n+p} \leq v_n.v_p$$

Il en découle que (u_n) est sous-additive, donc $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge, donc $\left(v_n^{\frac{1}{n}}\right)$ converge.

6.5 La formule du rayon spectral

On sait qu'il existe sur $E = M_n(\mathbb{C})$ des normes sous-multiplicatives :

$$\forall A, B \in E,\ \|A.B\| \leq \|A\| . \|B\|$$

Soit $A \in E$ et

$$v_k = \left\|A^k\right\|$$

Que dire de (v_k) ?

Réponse

Analogue au cas précédent : la suite

$$\left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right)$$

converge. On peut montrer que sa limite est le rayon spectral de A :

$$\lim_k \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$$