Contents

Part I
Suites de fonctions

F désigne un espace vectoriel normé de dimension finie.
A est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

1 Convergence simple

1.1 Définition

Soit A un ensemble ; soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de A dans F.
On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur A si,
pour tout $x \in A$, $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.

Remarque

Unicité de f.

1.2 Exemples

1.2.1 les chapeaux pointus

$A = [0,1]$; $f_n(x) = nx$ si $x \leq \frac{1}{n}$; $f_n(x) = -n\left(x - \frac{2}{n}\right)$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$; $f_n(x) = 0$ si $x \geq \frac{2}{n}$.

1.2.2 la bosse glissante

$A = \mathbb{R}$; $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$.

1.2.3 les toboggans

$A = [0,1]$; $f_n(x) = x^n$.

1.2.4 la houle

$A = \mathbb{R}$; $f_n(x) = n.\sin\frac{x}{n}$.

1.2.5 encore des bosses

$A = \mathbb{R}+$; $f_n(x) = x.e^{-nx}$; $g_n(x) = n^2 x.e^{-nx}$.

1.3 Passage à la limite

Propriétés conservées ou non par passage à la limite :
1) continue
2) croissante
3) lipschitzienne
4) convexe
5) linéaire
6) périodique
7) uniformément continue
8) bornée
9) strictement croissante
10) monotone
11) de classe C^1

Convexité

Soit f définie sur un intervalle I à valeurs réelles.
On dit que f est convexe sur I si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1], \ f((1-t)x + ty) \leq (1-t).f(x) + t.f(y)$$

Réponses

Oui pour 2, 4, 5, 10 ; également pour k-lipschitzien et T-périodique.

Une suite de fonctions périodiques dont la limite ne l'est pas :

$$f_n(x) = n.\sin\frac{x}{n}$$

2 Convergence uniforme

2.1 Définition

Si $f_n - f$ est bornée, notons

$$\alpha_n = \sup_A \|f_n - f\| = \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\| = \|f - f_n\|_\infty$$

On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur A si

(α_n) est définie à partir d'un certain rang, et converge vers 0.

2.2 Convergence simple et uniforme

Théorème

Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur A,

alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur A.

Démonstration

Fixons $x \in A$.

$$\forall n \geq 0, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \alpha_n$$

et (α_n) tend vers 0.

Corollaire

Unicité de f.

2.3 Les cinq exemples

2.4 Réunion

Exercice

Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur A, et sur B,

est-ce-que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $A \cup B$?

Et dans le cas d'une réunion infinie ?

Réponse

C'est vrai pour $A \cup B$, et plus généralement pour une union finie.

C'est faux pour une union infinie ; voir les exemples plus haut.

2.5 Cas des fonctions bornées

Soit $E = (B(A,F), \|\|_\infty)$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans F.

On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge dans E vers f si $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\geq 0}$ tend vers 0.

2.5.1 Remarque 1

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E,

et f un élément de E.

$(f_n)_{n\geq 0}$ converge dans E vers f

si et seulement si

$(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur A.

2.5.2 Remarque 2

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E.
Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur A, alors $f \in E$.
Voir exemple 4.

3 Continuité, double limite

3.1 Continuité de la limite

Théorème

Si les f_n sont continues en a et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage V de a,
alors f est continue en a.

Démonstration

On fixe $\varepsilon > 0$; on fixe un n tel que $\alpha_n = \sup\limits_V \|f_n - f\|$ vérifie $\alpha_n \leq \varepsilon$.
Alors :

$$\forall x \in V, \|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(a)\| + \|f_n(a) - f(a)\|$$

donc

$$\forall x \in V, \|f(x) - f(a)\| \leq 2\varepsilon + \|f_n(x) - f_n(a)\|$$

pour finir ?

Réponse

f_n étant continue en a :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B(a, \delta), \|f_n(x) - f_n(a)\| \leq \varepsilon$$

Alors

$$\forall x \in B(a, \delta) \cap V, \|f(x) - f(a)\| \leq 3\varepsilon$$

3.2 Théorème de la double limite

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F et a un point adhérent à A.
On suppose que :
- (f_n) converge uniformément vers f sur A.
- Pour tout n, f_n admet une limite finie l_n en a.

Alors (l_n) admet une limite l ; de plus, l est la limite de f au point a.
En résumé :

$$\lim_a \lim_n f_n = \lim_a f = \lim_n l_n = \lim_n \lim_a f_n$$

Extension

Le théorème s'étend au cas où $A \subset \mathbb{R}$, et $a = \pm\infty$.

Démonstration non exigible

4 Compléments

4.1 Un exemple

$A = [1, +\infty[$.

$$f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

Etudier convergence simple et uniforme.

Réponse

Fixons $x > 0$.

$\forall n \geq 1, n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n.\left(\exp\left(\frac{1}{n}.\ln x\right) - 1\right) = n\left(\frac{1}{n}.\ln x + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln x + o(1)$

Donc (f_n) converge simplement sur A vers $f = \ln$.

Par croissances comparées :

$$\lim_{+\infty}(f_n - f) = +\infty$$

Donc $f - f_n$ n'est pas majorée sur A.

Donc la convergence n'est pas uniforme sur A.

Néanmoins, la convergence est uniforme sur tout segment $J = [1, a]$ pour tout $a > 1$.

En effet :

$$\forall n \geq 1, M_n = \sup_J |f_n - f| = (f_n - f)(a)$$

donc (M_n) tend vers 0.

4.2 Caractérisation séquentielle

Exercice

Soit f une fonction bornée de A dans F, et (f_n) une suite de fonctions bornées de A dans F.

Alors :

$(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur A

si et seulement si

Pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, la suite

$$((f_n - f)(u_n))$$

converge vers 0.

Démonstration

Notons $g_n = f_n - f$.

Supposons que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur A.

Soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$.

$$\forall n \geq 0, |g_n(u_n)| \leq \alpha_n = \sup_A \|g_n\|$$

donc tend vers 0.

Réciproque

Supposons que pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, la suite $(g_n(u_n))$ converge vers 0.

Pour tout $n \geq 0$, on choisit u_n tel que

$$\alpha_n - \frac{1}{n} \leq |g_n(u_n)| \leq \alpha_n$$

Alors :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{n} + |g_n(u_n)|$$

On sait que $(g_n(u_n))$ converge vers 0 ; donc (α_n)converge vers 0.

Exercice

Généraliser au cas des fonctions non bornées.

4.3 Fonctions polynomiales 1

Soit (P_n) une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Alors f est une fonction polynomiale.

Démonstration

A partir d'un certain rang q, $f - P_n$ est bornée. Or

$$P_{n+1} - P_n = (P_{n+1} - f) - (P_n - f)$$

Donc $P_{n+1} - P_n$ est bornée sur $\mathbb{R}$, donc constante :

$$\forall n \geq q, P_n = P_q + \lambda_n$$

où λ_n est un réel.

La suite (λ_n) converge car, par exemple, $\lambda_n = P_n(0) - P_q(0)$.

Donc

$$f = P_q + \lambda$$

où λ est la limite de (λ_n).

4.4 Fonctions polynomiales 2

Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales de degré majoré :

$$\forall n,\ P_n \in \mathbb{R}_p[X]$$

qui converge simplement vers f sur un segment A non trivial.

Alors la convergence est uniforme et f est une fonction polynomiale.

Démonstration

On peut fixer $p+1$ points distincts $a_0, a_1, ..., a_p$ dans A

et utiliser la base des polynômes de Lagrange associée :

$$\forall n, P_n = \sum_{j=0}^{p} P_n(a_j) L_j$$

Par passage à la limite simple, f est polynomiale :

$$\forall x \in A, f(x) = \sum_{j=0}^{p} f(a_j) L_j(x)$$

Remarque

Dans un espace de dimension finie,

la convergence des coordonnées entraîne la convergence pour toute norme,

donc la convergence uniforme.

4.5 Toboggans déformés

Soit $A = [0,1]$; soit f continue de A dans F ; soit $f_n(x) = x^n.f(x)$.

Etudier la convergence de (f_n).

Réponse

Supposons $f(1) \neq 0$.
(f_n) converge vers une limite g non continue.
Donc la suite ne converge pas uniformément sur A.
Supposons $f(1) = 0$.
Fixons $\varepsilon > 0$; soit $a \in]0,1[$ tel que

$$\forall x \in [a,1], |f(x)| \leq \varepsilon$$

Notons $M = \|f\|_\infty$.

$$\forall n \geq 0, \|f_n\|_\infty \leq \max(\varepsilon, M.a^n)$$

Conclusion :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

4.6 Le théorème de Dini

On suppose
- A compact.
- $F = \mathbb{R}$.
- Pour tout n, $f_{n+1} \leq f_n$.
- (f_n) converge simplement vers f.
- f et les f_n continues.

Alors la convergence est uniforme.

Démonstration

On se ramène au cas où $f = 0$.
On note x_n un point où f_n atteint son maximum :

$$M_n = f_n(x_n)$$

(M_n) est décroissante et converge vers une limite $M \geq 0$
La suite (x_n) possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un point $a \in A$.
Fixons $p \geq 0$:

$$\forall n \geq p, M_{\varphi(n)} = f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leq f_p(x_{\varphi(n)})$$

Par passage à la limite sur n :

$$0 \leq M \leq f_p(a)$$

A nouveau par passage à la limite : $M = 0$.

4.7 Norme et convergence simple

Il n'existe pas de norme sur $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définissant la convergence simple.

Démonstration

Soit $\|\|$ une norme sur E.
Construisons une suite (f_n) telle que :
- $\forall n \geq 0$, $\|f_n\| = 1$.
- (f_n) converge simplement vers 0.

Indication :
Une suite de chapeaux de support $\left[0, \frac{1}{n}\right]$.

5 Intégration d'une limite uniforme sur un segment

5.1 Théorème

Soit

- (f_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F.
- a un point de I.

On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit

$$F_n(x) = \int_a^x f_n, \ F(x) = \int_a^x f$$

Alors :

(F_n) converge uniformément vers F sur tout segment $J \subset I$.

Démonstration

On peut supposer $a \in J$; pour tout $n \geq 0$:

$$\sup_J \|F_n - F\| \leq L.\alpha_n$$

où L est la largeur de J, et $\alpha_n = \sup\limits_J \|f_n - f\|$. En effet :

$$\forall x \in J, \|F_n(x) - F(x)\| = \left\| \int_a^x f_n - f \right\| \leq \left| \int_a^x \|f_n - f\| \right| \leq L.\alpha_n$$

5.2 Corollaire

Si (f_n) converge uniformément vers f sur le segment J,

alors $\left(\int_J f_n\right)$ converge vers $\left(\int_J f\right)$, soit :

$$\lim_n \int_J f_n = \int_J \lim_n f_n$$

5.3 Un exemple

$I = \mathbb{R}$; $a = 0$; $f_n = \frac{1}{n}$; étudier F_n.

Réponse

On constate que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Mais

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \frac{x}{n}$$

(F_n) ne converge uniformément vers $F = 0$ que sur tout segment.

6 Dérivation de la limite d'une suite de fonctions

6.1 Théorème de dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F.

On suppose que

- Pour tout n, f_n est de classe C^1 sur I.
- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.
- (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

Alors :

- (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.
- f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

Démonstration

Fixons $a \in I$;

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'$$

On applique le corollaire précédent :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x g$$

Donc f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

6.2 Extension

Théorème

Soit $k \geq 1$; soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F.
On suppose que
- Pour tout entier n, f_n est de classe C^k sur I.
- Pour tout entier j, $0 \leq j \leq k-1$, $\left(f_n^{(j)}\right)$ converge simplement sur I vers une fonction g_j.
- $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k.
Alors :
- $f = g_0$ est de classe C^k sur I.
- $f^{(j)} = g_j$ pour tout j, $0 \leq j \leq k$.

Démonstration

Par récurrence sur k ; $k = 1$ est donné par **6.1**.
Soit $k \geq 2$; on suppose la propriété vérifiée au rang $k-1$.Notons

$$h_n = f_n^{(k-1)}$$

6.1 s'applique, et montre que :
- (h_n) converge uniformément sur tout segment de I.
- $g_{k-1}' = g_k$
On peut donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence à (f_n) :
$f = g_0$ est donc de classe C^{k-1}, et $f^{(k-1)} = g_{k-1}$, ce qui permet de conclure.

Part II
Séries de fonctions

7 Convergence simple

Définition

Soit A un ensemble ; soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de A dans F.
On note

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On dit que $\sum u_k$ converge simplement sur A si la suite (s_n) converge simplement sur A.
Dans ce cas, la limite s de (s_n) est appelée somme de la série.

8 Convergence uniforme

8.1 Définition

On dit que $\sum u_k$ converge uniformément sur A si la suite (s_n) converge uniformément sur A.

8.2 Reste d'une série convergente

On suppose que $\sum u_k$ converge simplement sur A ; soit

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = s(x) - s_n(x)$$

A quelle condition la série converge-t-elle uniformément ?

Réponse

Soit

$$\alpha_n = \sup_A \|s_n - s\|$$

La série converge uniformément sur A si la suite (α_n) converge vers 0 ; or

$$\alpha_n = \sup_A \|r_n\| = \sup_A \|r_n - 0\|$$

Conclusion

Une série de fonctions converge uniformément
si et seulement si
elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

9 Continuité, double limite

9.1 Continuité

Théorème

Si les u_k sont continues en a,
et si $\sum u_k$ converge uniformément vers s sur un voisinage de a,
alors s est continue en a.

9.2 Théorème de la double limite

Soit $\sum u_k$ une série de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers s sur A,
et soit a un point adhérent à A.
On suppose que, pour tout k, u_k admet une limite finie l_k en a.
Alors :
- $\sum l_k$ converge.
- De plus, $\sum_{k=0}^{\infty} l_k$ est la limite de s au point a.

Extension

Le théorème s'étend au cas où $A \subset \mathbb{R}$, et $a = \pm\infty$.

10 Intégration d'une série uniformément convergente sur un segment

10.1 Théorème

Soit (u_k) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans F, a un point de I.

On suppose que $\sum u_k$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction s. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit

$$U_k(x) = \int_a^x u_k, \; S(x) = \int_a^x s$$

Alors :
$\sum U_k$ converge uniformément vers S sur tout segment $J \subset I$.

10.2 Corollaire

Si $\sum u_k$ converge uniformément vers s sur le segment J, alors :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_J u_k = \int_J s = \int_J \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

11 Dérivation de la somme d'une série de fonctions

11.1 Théorème de dérivation

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
à valeurs dans F.
On suppose que
- Pour tout $n \geq 0$, u_n est de classe C^1 sur I.
- $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction s.
- $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction t.

Alors :
- $\sum u_n$ converge uniformément vers s sur tout segment de I.
- s est de classe C^1 sur I et $s' = t$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)'$$

11.2 Extension

Théorème

Soit $k \geq 1$; soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
à valeurs dans F.
On suppose que :
- Pour tout entier n, u_n est de classe C^k sur I.
- Pour tout entier j, $0 \leq j \leq k-1$, $\sum u_n^{(j)}$ converge simplement sur I vers une fonction s_j.
- $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction s_k.

Alors :
- $f = s_0$ est de classe C^k sur I.
- $f^{(j)} = s_j$ pour tout j, $0 \leq j \leq k$.

12 Convergence normale

12.1 Définition

Soit (u_k) une suite de fonctions bornées sur A ; on note

$$M_k = \|u_k\|_\infty$$

On dit que $\sum u_k$ converge normalement sur A si la série $\sum M_k$ converge.

12.2 Théorème

La convergence normale implique
- la convergence absolue en tout point,
- la convergence uniforme.

Démonstration

La convergence absolue en tout point est facile :

$$\forall k \geq 0, \|u_k(x)\| \leq M_k$$

Soit $\alpha_n = \sup\limits_A \|r_n\|$.

$$\forall n \geq 0,\ 0 \leq \alpha_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

C'est le reste d'une série numérique convergente, donc qui tend vers 0, donc (α_n) tend vers 0, d'où la convergence uniforme.

13 Premiers exemples

13.1 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2 x}$

On choisit $A =]0, +\infty[$; on montre que :
f est définie, décroissante, convexe, continue, de classe C^1.
$f(x) \sim -\ln x$ au voisinage de 0.
$f(x) \sim \frac{\zeta(2)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.
$f(1) = 1,\ f(2) = 2 - 2.\ln 2$.

Commenter le tableau suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{cvu sur } [a, +\infty[& \to & f\ C^0 \text{ sur } [a, +\infty[\\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{cvu sur }]0, +\infty[& \to & f\ C^0 \text{ sur }]0, +\infty[\end{array}$$

13.2 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

On choisit $A =]0, +\infty[$; on montre que :
f est définie, continue, de classe C^1.
$f(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0.
$f(x) \sim \frac{1}{2x}$ au voisinage de $+\infty$.

Etude en $+\infty$

Le théorème de la double limite montre que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Cherchons un équivalent :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+x)(2p+x+1)}$$

Pourquoi ? Est-ce-que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{p=0}^{\infty} (a_{2p} + a_{2p+1})$$

pour toute série convergente ?

Par comparaison avec l'intégrale :

$$\forall x > 0,\ \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(2t+x)(2t+x+1)} \le f(x) \le \frac{1}{x(x+1)} + \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(2t+x)(2t+x+1)}$$

D'où

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le f(x) \le \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Donc $f(x) \sim \frac{1}{2x}$ au voisinage de $+\infty$.

Une autre méthode

Montrer d'abord que

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

14 Exercices : la fonction ζ de Riemann

14.1 Premières propriétés

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Trouver le domaine de définition I de ζ.

Montrer que ζ est décroissante, et convexe sur I.

14.2 Régularité

Montrer que ζ est continue, puis C^1.

14.3 Limites

14.3.1 en $+\infty$

ζ tend vers 1.

14.3.2 en 1^+

$\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$.

14.4 La fonction η

14.4.1 Définition

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

Domaine de définition ?

14.4.2 Continuité

Montrer que η est continue sur $I =]0, +\infty[$.

Démonstration

Fixons $a > 0$.

$$\forall x \geq a, \forall n \geq 1, \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

majorant indépendant de x et qui tend vers 0.

D'où la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$,
d'où la continuité de η sur $[a, +\infty[$,
d'où la continuité de η sur $]0, +\infty[$.

14.4.3 Relation avec ζ

Montrer que, si $x > 1$:

$$\eta(x) = \zeta(x)\left(1 - 2^{1-x}\right)$$

Réponse

Fixons $x > 1$.

$$\zeta(x) - \eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} + \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Donc

$$\zeta(x) - \eta(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(2p)^x} = 2^{1-x}\zeta(x)$$

On peut ainsi prolonger ζ sur $]0, 1[$.

14.4.4 Dérivation

Montrer que η est de classe C^1 sur I.

Il faut étudier la série

$$\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$$

On essaie le critère des séries alternées .

La suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ est décroissante à partir de ?

Réponse

Dès que $n \geq \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Fixons $a > 0$ et $n_0 = \left\lceil \exp\left(\frac{1}{a}\right) \right\rceil$.

$$\forall x \geq a, \forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a}$$

majorant indépendant de x et qui tend vers 0.

D'où la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$,
d'où le caractère C^1 de η sur $[a, +\infty[$,
d'où le caractère C^1 de η sur $]0, +\infty[$.

14.4.5 en $+\infty$

Montrer que η a une limite finie.

Réponse

On peut utiliser le théorème de la double limite, ou l'encadrement :

$$\forall x > 0, 1 - \frac{1}{2^x} \leq \eta(x) \leq 1$$

14.4.6 en 0^+

$$\forall x > 0,\ 2\eta(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n(x)$$

avec

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

On vérifie que le critère des séries alternées s'applique.
D'où :

$$1 \leq 2\eta(x) \leq 1 + v_1(x)$$

Conclusion : en 0^+, η tend vers $\frac{1}{2}$.

Remarque

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

Part III
Approximation uniforme

15 Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier

15.1 Définitions

15.1.1 Fonction continue par morceaux sur un segment

Soit f une fonction définie sur un segment $I = [a, b]$,
à valeurs dans F.
On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$
s'il existe une subdivision finie

$$S = (a_0, a_1, ..., a_n)$$

telle que :
- $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$
- la restriction de f à chaque $]a_k, a_{k+1}[$ est continue
- f possède une limite finie à gauche et à droite en chacun des a_k

15.1.2 Bornée

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Démonstration

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.
Soit $S = (a_0, a_1, ..., a_n)$ une subdivision associée à f.
La restriction de f à chaque $]a_k, a_{k+1}[$ admet un prolongement g_k continu sur $[a_k, a_{k+1}]$.
g_k est donc bornée ; soit

$$M_1 = \max_k \|g_k\|_\infty$$

Soit

$$M_2 = \max_j \|f(a_j)\|$$

f est bornée par

$$M = \max(M_1, M_2)$$

15.1.3 Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I
si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

15.1.4 Remarque

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle est-elle bornée ?
Le nombre de points de discontinuité est-il fini ?

15.1.5 Exercice : le module de continuité

Le module de continuité : soit f une fonction bornée sur un intervalle I.
Pour $h \geq 0$, on pose

$$\omega(h) = \sup \{|f(x) - f(y)| \;/\; x, y \in I, |x - y| \leq h\}$$

Que dire de ω ? A quelle condition ω tend vers 0 en 0^+ ?

Réponse

- ω est positive, croissante.
- sa limite en $+\infty$ est le diamètre de l'image de f.
- ω tend vers 0 en 0^+ si et seulement si f est uniformément continue.

15.2 Théorème

15.2.1 Enoncé

Soit J un segment.
L'ensemble des fonctions en escalier sur J est dense
dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur J,
pour la norme $\|\|_\infty$.

15.2.2 Démonstration

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b]$; soit $n \geq 1$.
On définit une subdivision $S = (a_0, ..., a_n)$ par $a_k =$?
On définit une fonction f_n ainsi :
Pour $a_k \leq t < a_{k+1}$, $f_n(t) =$?
Dans ce cas, que dire de $\|f_n - f\|_\infty$?

Réponses

$a_k = a + k\frac{b-a}{n}$; $f_n(t) = f(a_k)$.

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Cas général

f est seulement continue par morceaux ?

15.2.3 Une application : le lemme de Riemann-Lebesgue (exercice)

Soit f continue par morceaux sur un segment $I = [a, b]$ à valeurs complexes.
On pose

$$g(x) = \int_I f(t)\, e^{itx} \mathrm{d}t$$

Montrer que

$$\lim_{+\infty} g = 0$$

Démonstration

Rappelons qu'il existe une démonstration rapide dans le cas où... ?

Dans le cas où f est C^1 sur $[a, b]$.

Cas général :

Soit (f_n) une suite de fonctions en escalier telle que $\|f - f_n\|_\infty$ tend vers 0.

On pose

$$g_n(x) = \int_I f_n(t) e^{itx} \mathrm{d}t$$

On sait que

$$\lim_{+\infty} g_n = 0$$

Que reste-t-il à faire ?

Réponse

Il suffit de montrer que (g_n) converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Or :

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \ |g_n(x) - g(x)| \leq (b - a) \|f - f_n\|_\infty$$

majorant indépendant de x qui tend vers 0.

Cette méthode ne s'applique pas si f est seulement intégrable sur un intervalle quelconque,

mais le résultat demeure...

16 Théorème de Weierstrass

Démonstration non exigible

16.1 Enoncé

Toute fonction continue f sur un segment $J = [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

16.2 Introduction à la convolution

Question

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions de classe C^1 qui converge simplement vers f.

Idée

Choisir pour $f_n(x)$ une moyenne des valeurs prises par f :

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x - \frac{1}{n}}^{x + \frac{1}{n}} f$$

Caractère C^1

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \frac{n}{2} \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F\left(x - \frac{1}{n}\right) \right)$$

où F est une primitive de f.

Convergence

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{2}.\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t\right|$$

ou

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}.\left|\int_{-1}^{1} \left(f\left(x + \frac{u}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{d}u\right|$$

Conclusion ?

Autre écriture de f_n

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

où φ_n est la fonction
- constante $\frac{n}{2}$ sur $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$,
- nulle ailleurs.

Le produit de convolution.

$$f_n = f * \varphi_n = \varphi_n * f$$

* est appelé produit de convolution.
(φ_n) approche en un certain sens un élément neutre pour *

Les 3 propriétés de base de (φ_n)

- $\forall n \geq 1,\ \varphi_n \geq 0$
- $\forall n \geq 1,\ \int \varphi_n = 1$
- $\forall \delta > 0,\ \lim\limits_{n} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n = 1$

16.3 Démonstration du théorème

16.3.1 étape 1

On se ramène au cas où $J = [0, 1]$.
Pour cela, on pose $g(t) = f((1-t)a + tb)$.

16.3.2 étape 2

On se ramène au cas où $f(0) = f(1) = 0$.
Pour cela, on pose $g(t) = f(t) - f(0) - t(f(1) - f(0))$.

16.3.3 étape 3

On prolonge f par 0 hors de $[0, 1]$; f est alors uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

16.3.4 étape 4

On définit le noyau K_n:

$$K_n(t) = a_n\left(1 - t^2\right)^n$$

où a_n est tel que $\int_{-1}^{1} K_n = 1$. Montrer que pour tout $\delta \in]0, 1[$:

$$\lim_{n} \int_{\delta}^{1} K_n = 0$$

Démonstration

On remarque que K_n est positive et décroissante sur $[0,1]$; il en découle que :

- $\left(\int_\delta^1 K_n\right)$ est dominée par $a_n.\left(1-\delta^2\right)^n = K_n\left(\delta\right)$
- De même, $a_n.\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n = K_n\left(\frac{\delta}{2}\right)$ est dominée par $\left(\int_0^{\frac{\delta}{2}} K_n\right)$

Donc, par comparaison de suites géométriques :

$$\int_\delta^1 K_n = o\left(\int_0^{\frac{\delta}{2}} K_n\right)$$

Or $\int_0^{\frac{\delta}{2}} K_n$ est majorée par 1, d'où la conclusion.

16.3.5 étape 5

On définit P_n sur $[0,1]$:

$$P_n\left(x\right) = \int_0^1 f\left(t\right) K_n\left(x-t\right) \mathrm{d}t = \int_{-1}^1 f\left(x-u\right) K_n\left(u\right) \mathrm{d}u$$

On montre que P_n est polynomiale à l'aide de

$$P_n\left(x\right) = \int_0^1 f\left(t\right) K_n\left(x-t\right) \mathrm{d}t$$

16.3.6 étape 6

On montre la convergence uniforme :
On note

$$M = \|f\|_\infty$$

Fixons $\varepsilon > 0$; soit $\delta > 0$ associé : $\omega\left(\delta\right) \leq \varepsilon$.

$$\forall x \in [0,1]\,,\ f\left(x\right) - P_n\left(x\right) = \int_{-1}^1 \left(f\left(x\right) - f\left(x-u\right)\right) K_n\left(u\right) \mathrm{d}u = \int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_\delta^1$$

$$\forall x \in [0,1]\,,\ \left|f\left(x\right) - P_n\left(x\right)\right| \leq \varepsilon + 4M\int_\delta^1 K_n$$

Pour conclure :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall x \in [0,1]\,,\ \left|f\left(x\right) - P_n\left(x\right)\right| \leq 2\varepsilon$$

Part IV
Exercices : utilisations de la transformation d'Abel

17 Application à $\sum b_n \sin nt$

17.1 Calcul préliminaire

$s_n\left(t\right) = \sum_{k=1}^n \sin kt = ?$

Réponse

$$s_n\left(t\right) = \sin n\frac{t}{2} \frac{\sin\left(n+1\right)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

Conséquence

Soit $J = [a, 2\pi - a]$ avec $0 < a < \pi$.

La suite (s_n) est uniformément bornée sur J :

$$\exists M > 0, \forall n \geq 1, \forall x \in J, |s_n(x)| \leq M$$

Il suffit de choisir $M =$?

Réponse

$M = \frac{1}{\sin \frac{a}{2}}$.

17.2 La convergence uniforme de $\sum b_n \sin nt$

Hypothèse : (b_n) décroit et tend vers 0.

Dans ce cas, $\sum b_n \sin nt$ converge uniformément sur tout segment

$$J = [a, 2\pi - a]$$

pour $0 < a < \pi$.

Démonstration

Principe : on remplace $\sin kt$ par $s_k(t) - s_{k-1}(t)$.

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt = \sum_{k=1}^{n} b_k (s_k(t) - s_{k-1}(t)) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) s_k(t) + b_{n+1} s_n(t)$$

On montre ensuite que la série $\sum (b_k - b_{k+1}) s_k(t)$ converge normalement sur J.

17.3 La non convergence uniforme de $\sum \frac{\sin nt}{n}$

$\sum \frac{\sin nt}{n}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Démonstration

On note (S_n) la suite des sommes partielles de cette série.

Soit $n \geq 1$; soit $x_n = \frac{\pi}{6n}$; soit

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin k.x_n}{k}$$

$$A_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.\sin\frac{\pi}{6} \geq \frac{1}{4}$$

Donc

$$\|S_{2n} - S_n\|_\infty \geq \frac{1}{4}$$

Donc la suite (S_n) diverge pour $\|\|_\infty$.

18 Application à $\sum a_n x^n$

Exercice

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; on suppose que $\sum a_n$ converge.

Montrer que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $J = [0, 1]$.

Remarque

On vérifie d'abord la convergence simple :

(a_n) tend vers 0, donc est bornée ; soit M un majorant de $(|a_n|)$.

$$\forall x \in [0,1[\,, |a_n.x^n| \leq M.x^n$$

ce qui prouve que la série converge absolument.

18.1 1er cas : $\sum a_n$ converge absolument

$$\forall x \in [0,1]\,, |a_n.x^n| \leq |a_n|$$

majorant indépendant de x et terme général d'une série convergente,

ce qui prouve que la série converge normalement sur J.

18.2 2e cas : $\sum a_n$ converge d'après le TSA

$a_n = (-1)^n\, b_n$; (b_n) est décroissante et de limite nulle.

$$\forall x \in J, \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k \right| \leq b_n$$

majoration indépendante de x par le terme général d'une suite qui tend vers 0.

D'où la convergence uniforme sur J.

18.3 Le cas général : $\sum a_n$ converge

18.3.1 Notation

On rappelle que $a_n = r_{n-1} - r_n$; soit $u_n = \sup\limits_{k \geq n} |r_k|$.

Que dire de (u_n) ?

18.3.2 Démonstration

On remplace a_n par $r_{n-1} - r_n$; on obtient $\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k x^k = ?$

Réponse

$$\forall x \in [0,1[\,, \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=p+1}^{\infty} (r_{k-1} - r_k)\, x^k = \sum_{j=p+1}^{\infty} r_{j-1}.x^j - \sum_{k=p+1}^{\infty} r_k.x^k$$

Donc

$$\forall x \in [0,1[\,, \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=p}^{\infty} r_k.x^{k+1} - \sum_{k=p+1}^{\infty} r_k.x^k = \sum_{k=p+1}^{\infty} r_k \left(x^{k+1} - x^k\right) + r_p x^{p+1}$$

Donc

$$\forall x \in J, \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=p+1}^{\infty} r_k \left(x^{k+1} - x^k\right) + r_p x^{p+1}$$

Ensuite :

$$\forall x \in J, \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} r_k \left(x^{k+1} - x^k\right) \right| \leq u_p. \sum_{k=p+1}^{\infty} \left| x^k - x^{k+1} \right| \leq u_p x^{p+1} \leq u_p$$

Conclusion

$$\forall x \in J, \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq 2.u_p$$

majoration indépendante de x par le terme général d'une suite qui tend vers 0.