Topologie des espaces vectoriels normés

Contents

Dans la suite, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Normes et espaces vectoriels normés

1.1 Distance

Définition

Soit A un ensemble ; soit d une application de A^2 dans $\mathbb{R}+$.
On dit que d est une distance sur A si :
1) $\forall x, y \in A, d(x,y) = d(y,x)$
2) $\forall x, y, z \in A, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
3) $\forall x, y \in A, d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

Définition

Si d est une distance sur A, on dit que (A, d) est un espace métrique.

1.2 Norme

1.2.1 Définition

Soit E un $K-$espace vectoriel ; soit N une application de E dans $\mathbb{R}+$; on dit que N est une semi-norme sur E si :
1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
2) $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$: l'inégalité triangulaire.

1.2.2 Définition

Une semi-norme N est une norme si de plus :
3) $\forall x \in E - \{0\}, N(x) > 0$
Si N est une norme sur E, on dit que (E, N) est un espace vectoriel normé.
La norme est souvent notée ainsi : $N(x) = \|x\|$.

1.2.3 Distance associée

Soit (E, N) est un espace vectoriel normé ; soit A une partie de E ; on définit une distance d sur A par

$$d(x,y) = N(x-y)$$

Dans la suite, on n'étudiera que les espaces métriques qui sont des parties d'un espace normé, et dont la distance est définie à partir de la norme.

1.2.4 La deuxième inégalité triangulaire.

Toute norme vérifie aussi :

$$\forall x, y \in E, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Démonstration

Soit $x, y \in E$.
$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, donc

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Puis de même, $-\|x\| + \|y\| \leq \|x - y\|$.

Exemple

La distance entre Paris et Lille est de 204 km ; on en déduit que les distances d_1 de Marseille à Paris et d_2 de Marseille à Lille diffèrent d'au plus 204 km.
En fait, $d_1 = 661$ et $d_2 = 835$.

1.3 Fonctions lipschitziennes

1.3.1 Définition

Soit E et F deux espaces normés, A une partie de E, et f une application de A dans F ; on dit que f est $k-$lipschitzienne si

$$\forall x, y \in A, \left\| f(x) - f(y) \right\|_F \leq k. \left\| x - y \right\|_E$$

1.3.2 Exemple : la norme

D'après la deuxième inégalité triangulaire, $x \to \|x\|$ est 1-lipschitzienne sur E.

1.3.3 Exercice : le plus petit rapport de Lipschitz

Soit f une application lipschitzienne ; montrer que f possède un plus petit rapport de Lipschitz.

Démonstration

$$k = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}$$

1.4 Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire ; on définit une norme sur E ainsi :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1.5 Exemples de normes sur K^n

1.5.1 $E = \mathbb{K}$

La norme est en général la valeur absolue si $E = \mathbb{R}$, le module si $E = \mathbb{C}$.

1.5.2 $\|\|_1$

$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$.

1.5.3 $\|\|_\infty$

$\|x\|_\infty = \max\limits_j |x_j|$.

1.5.4 $\|\|_2$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

On montre que c'est la norme associée à un produit scalaire ; lequel ? Si $K = \mathbb{C}$?

Réponse

En notant X et Y les colonnes associées à x et y :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j . y_j = X^T . Y$$

Si $K = \mathbb{C}$:

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} . y_j$$

1.6 Parties bornées

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E, N).

On dit que A est bornée si

$$\{\|x\| / x \in A\}$$

est majorée.

On dit qu'une fonction à valeurs dans E est bornée si son image est bornée.

Diamètre

Soit A une partie non vide bornée d'un espace vectoriel normé(E, N).

On appelle diamètre de A :

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\|x - y\| / x, y \in A\}$$

1.7 Boules

1.7.1 Définition : boules dans E

Soit E un espace vectoriel normé E ; soit $a \in E$ et $r \geq 0$.

Boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$B(a, r) = \{x \in E / d(x, a) < r\} = \{x \in E / \|x - a\| < r\}$$

Boule fermée de centre a et de rayon r :

$$B_f(a, r) = \{x \in E / \|x - a\| \leq r\}$$

Sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a, r) = \{x \in E / \|x - a\| = r\}$$

1.7.2 Définition : boules dans A

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E ; soit $a \in A$ et $r \geq 0$.

Boule ouverte dans A de centre a et de rayon r :

$$B_A(a, r) = \{x \in A / d(x, a) < r\} = \{x \in A / \|x - a\| < r\}$$

Boule fermée de centre a et de rayon r :

$$B_{A,f}(a, r) = \{x \in A / \|x - a\| \leq r\}$$

Sphère de centre a et de rayon r :

$$S_A(a, r) = \{x \in A / \|x - a\| = r\}$$

Remarque

$$B_A(a, r) = B(a, r) \cap A$$

1.7.3 Exemples

Décrire les boules dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{R}^2$ pour chacune des 3 normes précédentes.

Réponse

Dans $\mathbb{R}$: $B(a, r) =]a - r, a + r[$.

Dans $\mathbb{R}^2$: $B(a, r)$ est un disque pour $\|\|_2$, un carré pour les deux autres.

1.7.4 Boules dans $\mathbb{R}+$

1.7.5 Convexité des boules

Rappel

Soit A une partie d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E ; on dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A,\, [x, y] \subset A$$

où

$$[x, y] = \{(1-t)\,x + ty\,/t \in [0, 1]\}$$

Théorème

Les boules d'un espace normé sont convexes.

Démonstration

Il faut remarquer que $(1-t)\,x + ty - a$ peut s'écrire

$$(1-t)\,(x-a) + t\,(y-a)$$

Ensuite appliquer l'inégalité triangulaire.

1.8 Distance à une partie

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E ; soit $x \in E$.

On appelle distance de x à A

$$d_A\,(x) = \inf_{u \in A} \|x - u\|$$

Existence de $d_A\,(x)$?

Théorème

d_A est 1-lipschitzienne sur E.

Démonstration

Soit $x, y \in E$.

$$\forall u \in A,\, d_A\,(x) \leq \|x - u\| \leq \|x - y\| + \|y - u\|$$

Donc :

$$\forall u \in A,\, m = d_A\,(x) - \|x - y\| \leq \|y - u\|$$

m est un minorant indépendant de u, donc, par passage à la borne inférieure :

$$d_A\,(x) - \|x - y\| \leq d_A\,(y)$$

Donc

$$d_A\,(x) - d_A\,(y) \leq \|x - y\|$$

et de même

$$d_A\,(y) - d_A\,(x) \leq \|x - y\|$$

D'où le résultat.

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé (E, N)

2.1 Définition

Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $a \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \|u_n - a\| \leq \varepsilon$$

Remarque

$(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $a \in E$ si et seulement si $(\|u_n - a\|)$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Remarque

(u_n) converge vers a si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \{n / \ \|u_n - a\| \geq \varepsilon\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$.

2.2 Unicité de la limite

Théorème

Si une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge, il y a unicité de la limite.

2.3 Caractère borné

Théorème

Si une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée.

Démonstration

Pour $\varepsilon = 1$, il existe n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \|u_n - a\| \leq \varepsilon$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$, avec $M = ?$

Réponse

$M_1 = \max \{\|u_k\| / k < n_0\}$; $M = \max (M_1, 1 + \|a\|)$.
En effet :

$$\forall n \geq n_{0,} \|u_n\| = \|u_n - a + a\| \leq \|u_n - a\| + \|a\| \leq 1 + \|a\|$$

2.4 Opérations sur les limites

Théorème

Soit $\lambda \in K$; si (u_n) converge vers u, et (v_n) converge vers v,
alors $(u_n + \lambda v_n)$ converge vers $u + \lambda v$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$; soit n_0 et n_1 tels que

$$\forall n \geq n_0, \|u_n - u\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n \geq n_1, \|v_n - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $n_2 = \max (n_0, n_1)$; alors :

$$\forall n \geq n_2, \|(u_n + v_n) - (u + v)\| \leq \varepsilon$$

2.5 Norme produit

2.5.1 Définition

Soit $(E_1, \|\|_1)$ et $(E_2, \|\|_2)$ deux espaces vectoriels normés.
On définit une norme sur $E = E_1 \times E_2$ ainsi :

$$\|(x, y)\| = \max (\|x\|_1, \|y\|_2)$$

On généralise aisément à un produit fini d'espaces vectoriels normés.

2.5.2 Convergence

Théorème

La suite $(z_n) = (u_n, v_n)$ converge vers $l = (a, b)$ dans E si et seulement si (u_n) converge vers a et (v_n) converge vers b.

Démonstration

$\forall n \geq 0$, $0 \leq \|u_n - a\|_1 \leq \|z_n - l\| \leq \|u_n - a\|_1 + \|v_n - b\|_2$.

2.6 Suites extraites

2.6.1 Lemme

Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$; alors :

$$\forall n \geq 0, \varphi(n) \geq n$$

2.6.2 Définition

Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

On dit que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est une suite extraite de (u_n).

Si $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge, on dit que sa limite est une valeur d'adhérence de (u_n).

2.6.3 Théorème

Si (u_n) converge vers a, toute suite extraite de (u_n) converge vers a.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \ \|u_n - a\| \leq \varepsilon$$

Alors :

$$\forall n \geq n_0, \ \left\|u_{\varphi(n)} - a\right\| \leq \varepsilon$$

car si $n \geq n_0$, alors $\varphi(n) \geq n \geq n_0$.

Corollaire

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence distinctes diverge ; exemple ?

Réponse

$u_n = (-1)^n$; (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers des limites distinctes.

3 Comparaison des normes

3.1 Exemples de normes sur des espaces de fonctions

3.1.1 Norme de la convergence uniforme

Soit X un ensemble ; soit E l'ensemble des fonctions bornées de X dans K.

On définit sur E la norme de la convergence uniforme ainsi :

$$\|f\|_\infty = \sup_X |f| = \sup_{t \in X} |f(t)|$$

Remarque

Cas particulier : la norme $\|\|_\infty$ déjà vue dans $E = \mathbb{R}^n$, avec $X =$?

3.1.2 Norme de la convergence en moyenne

Soit $I = [a, b]$ un segment ; soit $E = C^0(I, K)$; norme de la convergence en moyenne :

$$\|f\|_1 = \int_I |f| = \int_I |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Remarque

Peut-on généraliser à l'ensemble E' des fonctions continues par morceaux sur I ?

Réponse

On obtient une semi-norme sur E'.

3.1.3 Norme de la convergence en moyenne quadratique

Soit $I = [a, b]$ un segment ; soit $E = C^0(I, K)$; norme de la convergence en moyenne quadratique :

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette norme dérive du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_I fg$$

Si $K = \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle = \mathrm{Re} \int_I \overline{f} g$$

3.2 Normes équivalentes

3.2.1 Définition

Deux normes N et N' sur E sont équivalentes si

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall x \in E, \, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$$

Définition équivalente :
N et N' sur E sont équivalentes si $\frac{N}{N'}$ et $\frac{N'}{N}$ sont majorées sur $E - \{0\}$.

Complément

On dit que N_1 est plus fine que N_2 si

$$\exists \alpha > 0, \, N_2 \leq \alpha N_1$$

ou encore si $\frac{N_2}{N_1}$ est majorée.
Deux normes sont équivalentes si chacune des deux est plus fine que l'autre.

3.2.2 Remarque

Soit N et N' deux normes sur E équivalentes ; les parties bornées, les suites convergentes sont les mêmes.

3.3 Exemples dans K^n

3.3.1 $\|\|_\infty \leq \|\|_1$

3.3.2 $\|\|_1 \leq n \|\|_\infty$

3.3.3 $\|\|_\infty \leq \|\|_2$

3.3.4 $\|\|_2 \leq \sqrt{n} \|\|_\infty$

3.3.5 $\|\|_1 \leq \sqrt{n} \|\|_2$

3.3.6 $\|\|_2 \leq \|\|_1$

3.4 Exemples dans $M_n(\mathbb{R})$

3.4.1 $\|\|_2 , \|\|_\infty$

Il s'agit d'un cas particulier du précédent, avec n^2 à la place de n ; on définit donc :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\|\|_2$ (norme de Frobenius) est la norme associée à un produit scalaire ; lequel ? Si $K = \mathbb{C}$?

Réponse

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.b_{i,j}$$

Si $K = \mathbb{C}$:

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{i,j}}.b_{i,j}$$

Expression simplifiée pour $\|\|_2$?

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\left({}^tA.B\right), \ \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}\left({}^tA.A\right)}$$

3.4.2 Une norme subordonnée

On notera $F = M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des colonnes de taille n.

Définition

$$\|A\| = \sup_{x \in F - \{0\}} \frac{\|A.x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

Propriétés

On peut montrer qu'on définit ainsi une norme sur $E = M_n(\mathbb{R})$; $\|A\|$ est en fait le rapport de Lipschitz de A.

Cette norme vérifie

$$\forall x \in F, \|A.x\|_\infty \leq \|A\| . \|x\|_\infty$$

On l'appelle la norme subordonnée à $\|\|_\infty$.

Exercice

Soit $A \in E$. Notons $(L_1, ..., L_n)$ les lignes de A. Alors :

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|_1$$

Démonstration

Notons
$$m = \max_{1 \le i \le n} \|L_i\|_1$$

Soit $x \in F$.
$$\forall i, (A.x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

Donc :
$$\forall i, |(A.x)_i| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j| \le \|x\|_\infty . \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \|x\|_\infty . \|L_i\|_1 \le m. \|x\|_\infty$$

D'où :
$$\|A.x\|_\infty \le m. \|x\|_\infty$$

Cherchons maintenant $x \in F$, non nul, tel que $\|A.x\|_\infty = m. \|x\|_\infty$.

On choisit d'abord i tel que $m = \|L_i\|_1$. Ensuite ?

On définit x de la façon suivante :

$x_j = \pm 1$, du signe de $a_{i,j}$. Il y a alors égalité dans l'inégalité triangulaire.

3.4.3 Une autre norme subordonnée

Exercice

On note $F = M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des colonnes de taille n et
$$\|A\| = \sup_{x \in F - \{0\}} \frac{\|A.x\|_1}{\|x\|_1}$$

De manière analogue, on peut montrer qu'on définit ainsi une norme sur $E = M_n(\mathbb{R})$; $\|A\|$ est le rapport de Lipschitz de A. Cette norme vérifie
$$\forall x \in F, \|A.x\|_1 \le \|A\| . \|x\|_1$$

On l'appelle la norme subordonnée à $\|\|_1$. On va montrer que
$$\|A\| = \max_{1 \le j \le n} \|C_j\|_1$$

Démonstration

Soit $(e_1, e_2, ...e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notons
$$M = \max_{1 \le j \le n} \|C_j\|_1$$

Notons d'abord que
$$\forall j \in [\![1, n]\!], \|C_j\|_1 = \frac{\|A.e_j\|_1}{\|e_j\|_1}$$

Donc $M \le \|A\|$.

Inversement, soit $x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$.
$$\|Ax\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j . Ae_j \right\|_1 \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|Ae_j\|_1 \le M \sum_{j=1}^{n} |x_j| = M \|x\|_1$$

Donc
$$\forall x \in F \setminus \{0\}, \frac{\|A.x\|_1}{\|x\|_1} \le M$$

D'où $\|A\| \le M$.

3.4.4 Que dire de $\|A.B\|$?

Exercices

Pour $\|\|_\infty$
$$\forall A, B \in E, \|A.B\|_\infty \leq n.\|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

Pour $\|\|_1$
$$\forall A, B \in E, \|A.B\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$$

Pour la norme subordonnée

$$\forall A, B \in E, \|A.B\| \leq \|A\| . \|B\|$$

On parle de norme sous-multiplicative.

Autre norme qui vérifie cette propriété ?

$$n.\|A\|_\infty$$

3.4.5 Pour $\|\|_2$

$$\forall A, B \in E, \|A.B\|_2 \leq \|A\|_2 . \|B\|_2$$

Démonstration

Soit $C = AB$; alors :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \langle L_i(A), C_j(B) \rangle$$

Donc :
$$c_{i,j}^2 \leq \|L_i(A)\|_2^2 . \|C_j(B)\|_2^2 = a_i.b_j$$
On somme et on obtient le résultat.

Cas d'égalité

$\|A.B\|_2 = \|A\|_2 . \|B\|_2$ si et seulement si pour tout (i,j), $(L_i(A), C_j(B))$ est liée. Ce qui se produit dans les cas suivants :

- $A = 0$.
- $B = 0$.
- A et B sont de rang 1 ; les lignes de A et celles de B^T sont sur une même droite.

3.5 Exemples dans $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$

3.5.1 $\|\|_1 \leq (b-a)\|\|_\infty$

3.5.2 $\|\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|\|_\infty$

3.5.3 $\|\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|\|_2$

3.5.4 $\|\|_\infty \leq C.\|\|_1$?

Non, exemple

$I = [0,1]$; $f_n(x) = x^n$; la suite $\left(\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}\right)$ n'est pas pas majorée.

3.5.5 $\|\|_2 \leq \alpha \|\|_1$?

Même réponse.

3.5.6 Convergence de (f_n)

(f_n) converge vers $f = 0$ pour $\|\|_1$. En effet :

$$\forall n \geq 0, \|f_n\|_1 = \|f_n - 0\|_1 = \frac{1}{n+1}$$

Supposons que (f_n) converge vers une limite g pour $\|\|_\infty$.

Alors, (f_n) converge aussi vers g pour $\|\|_1$. En effet :

$$\forall n \geq 0, \|f_n - g\|_1 \leq \|f_n - g\|_\infty$$

Par unicité de la limite pour $\|\|_1$, $g = f = 0$.

Il reste à savoir si (f_n) converge vers 0 pour $\|\|_\infty$.

$$\forall n \geq 0, \|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 1$$

Donc (f_n) ne converge pas vers 0 pour $\|\|_\infty$.

Donc (f_n) n'a pas de limite pour $\|\|_\infty$.

3.6 Intégration sur un intervalle I quelconque

3.6.1 Convergence en moyenne

$$\|f\|_1 = \int_I |f| = \int_I |f(t)|\, \mathrm{d}t$$

définit une norme sur l'espace des fonctions continues intégrables sur I.

3.6.2 Exercice : convergence en moyenne quadratique

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette norme dérive du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g\rangle = \int_I fg$$

oui, mais sur quel espace ?

Réponse

L'ensemble des fonctions continues de carré intégrable.

Démonstration

$$|f+g|^2 \leq 2\left(|f|^2 + |g|^2\right)$$

prouve qu'il s'agit d'un espace vectoriel.

$$|fg| \leq \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$$

prouve que $\langle f, g\rangle = \int_I fg$ existe.

3.6.3 Généralisation

Soit ω une fonction continue et strictement positive sur I.

$$\langle f, g\rangle = \int_I fg\omega$$

définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions f continues sur I telles que ?

Telles que $f^2.\omega$ soit intégrable.

4 Topologie d'un espace métrique A

4.1 Ouverts de A

4.1.1 Définition

U est un ouvert de A si

$$\forall a \in U, \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset U$$

4.1.2 Quelques exemples dans $\mathbb{R}$

4.1.3 Stabilité

Théorème

Toute intersection finie, toute union d'ouverts de A est un ouvert de A.
L'ensemble vide et A sont des ouverts de A.

Démonstration

Soit U_1 et U_2 deux ouverts de A ; soit a élément de $U_1 \cap U_2$; alors
$\exists \varepsilon_1 > 0, B(a, \varepsilon_1) \subset U_1$
$\exists \varepsilon_2 > 0, B(a, \varepsilon_2) \subset U_2$
D'où

$$\exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$$

Par exemple, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Intersection quelconque ?

Soit $U_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ pour $n \geq 1$.

$$\bigcap_{n \geq 1} U_n = \{0\}$$

intersection d'ouverts de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

4.1.4 Boules

Théorème

Toute boule ouverte est un ouvert de A.

Démonstration

Soit $r > 0$; soit $U = B(a, r)$; soit $b \in U$; $B(b, \varepsilon) \subset U$, avec $\varepsilon =$?

Réponse

$$\varepsilon = r - \|a - b\|$$

En effet :

$$\forall x \in B(b, \varepsilon), \|a - x\| \leq \|a - b\| + \|b - x\| < \|a - b\| + \varepsilon = r$$

donc

$$B(b, \varepsilon) \subset B(a, r)$$

4.1.5 Les ouverts de A sont les unions de boules ouvertes

Démonstration

Les unions de boules ouvertes sont des ouverts de A. Réciproquement :

Soit U un ouvert de A, et V l'union des boules ouvertes contenues dans U ; évidemment,

$$V \subset U$$

Soit $x \in U$; alors $x \in V$ car ...?

Conclusion :

$$U = V$$

4.1.6 Voisinages

On dit que V est un voisinage de a dans A si V contient une boule de centre a et de rayon non nul, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0,\, B\left(a, \varepsilon\right) \subset V$$

Remarque

U est un ouvert de A si et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points.

Exemple

$A = \mathbb{R}$; $\mathbb{R}+$ est un voisinage de quels points ?

Tous sauf 0.

4.2 Continuité

4.2.1 Définition

Soit A et B deux espaces métriques ; soit f une application de A dans B.

On dit que f est continue au point $a \in A$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A,\, \mathrm{d}\left(x, a\right) < \alpha \Rightarrow \mathrm{d}\left(f\left(x\right), f\left(a\right)\right) < \varepsilon$$

Autre formulation

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\, f\left(B(a, \alpha)\right) \subset B\left(f\left(a\right), \varepsilon\right)$$

4.2.2 Définition, cas particulier de la précédente

Soit E et F deux espaces normés ; soit A une partie de E, B une partie de F ; soit f une application de A dans B.

On dit que f est continue au point $a \in A$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f\left(x\right) - f\left(a\right)\| < \varepsilon$$

Autre formulation

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\, f\left(B_A(a, \alpha)\right) \subset B\left(f\left(a\right), \varepsilon\right)$$

4.2.3 Les fonctions lipschitziennes

Théorème

Si f est $k-$lipschitzienne, alors f est continue sur A (en tout point de A).

Démonstration

$\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$; on remarque α est indépendant de a.

4.2.4 Images réciproques

Théorème

Soit f une application continue de A dans B.

Alors l'image réciproque de tout ouvert de B est un ouvert de A (pas un ouvert de E).

Démonstration

Soit V ouvert de B ; soit $U = f^{-1}(V)$; soit $a \in U$; $b = f(a) \in V$ et V est un ouvert de B ; donc :

$$\exists \varepsilon > 0, B(b, \varepsilon) \subset V$$

Ensuite :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Conclusion ?

$$B(a, \alpha) \subset U$$

4.2.5 Application

Toute boule ouverte de A est un ouvert de A.

Démonstration

$B(a, r) = f^{-1}(]-\infty, r[)$, avec $f : \begin{array}{c} A \to \mathbb{R} \\ x \to \|x - a\| \end{array}$

4.3 Fermés de A

4.3.1 Définition

T est un fermé de A si son complémentaire est ouvert dans A.

4.3.2 Quelques exemples dans $\mathbb{R}$

4.3.3 Stabilité

Théorème

Toute intersection, toute union finie de fermés de A est un fermé de A.

L'ensemble vide et A sont des fermés de A.

Union quelconque ?

Soit $T_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$; l'union des T_n pour $n \geq 1$ est $]0, 1]$ qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

4.3.4 Images réciproques

Théorème

Soit f une application continue de A dans B.

Alors l'image réciproque de tout fermé de B est un fermé de A.

Démonstration

Si T est le complémentaire de U dans B, alors $f^{-1}(T)$ est le complémentaire de $f^{-1}(U)$ dans A.

4.3.5 Boules

Théorème

Les boules fermées, les sphères sont des fermés de A.

Démonstration

$B_f(a,r) = f^{-1}(]-\infty,r])$; $S(a,r) = f^{-1}(\{r\})$.

4.4 Intérieur

4.4.1 Point intérieur

Définition

Soit E un espace normé ; soit A une partie de E, et a un élément de E.
a est un point intérieur à A si

$$\exists\varepsilon > 0, B(a,\varepsilon) \subset A$$

a est donc un point intérieur à A si A est un voisinage de a dans E.

Définition

L'ensemble des points intérieurs de A est appelé intérieur de A, noté $\mathrm{Int}(A)$, ou $\overset{\circ}{A}$.

4.4.2 Exemples dans $E = \mathbb{R}$

Trouver l'intérieur des parties suivantes de $\mathbb{R}$

1) $]0,1[$
2) $\mathbb{R}+$
3) $[0,1]$
4) $[0,1[$
5) $\mathbb{Z}$
6) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Réponses

1)$]0,1[$
2) $]0,+\infty[$
3, 4) $]0,1[$
5, 6) $\varnothing$

4.4.3 Propriétés

Soit A et B des parties de E.

1) $\overset{\circ}{A} \subset A$.
2) Si $A \subset B$, $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
3) Si A est un ouvert de E, $\overset{\circ}{A} = A$.
4) Soit U un ouvert de E contenu dans A ; alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.
5) $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E.

Démonstration

1), 2) , 3) : clair.
3) Soit U un ouvert de E contenu dans A :

$$U \subset A$$

Donc

$$\overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{A}$$

Or $U = \overset{o}{U}$, donc

$$U \subset \overset{\circ}{A}$$

5) Soit $a \in \overset{\circ}{A}$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(a,\varepsilon) \subset A$$

On sait que $U = B(a,\varepsilon)$ est un ouvert de E ; donc

$$B(a,\varepsilon) \subset \overset{o}{A}$$

$\overset{\circ}{A}$ est bien un ouvert de E.

4.4.4 Caractérisation de l'intérieur

Théorème

$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A : c'est un résumé de ce qui précède.

4.4.5 Exercice

Montrer que l'intérieur de A est un ouvert de E en utilisant une image réciproque.

Démonstration

On suppose A différent de E ; soit B le complémentaire de A dans E ; alors :

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in E \setminus d_B(x) > 0\}$$

4.5 Adhérence

4.5.1 Point adhérent

Définition

Soit E un espace normé ; soit A une partie de E, et a un élément de E.
a est un point adhérent à A si

$$\forall \varepsilon > 0, B(a,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

a est donc un point adhérent à A si tout voisinage de a dans E rencontre A.

Définition

L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A, noté $\overline{A}$.

4.5.2 Premières propriétés

- $A \subset \overline{A}$
- $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

4.5.3 Exemples dans $E = \mathbb{R}$

Trouver l'adhérence des parties suivantes de $\mathbb{R}$
1) $]0,1[$
2) $\mathbb{R}+$
3) $[0,1]$
4) $[0,1[$
5) $\mathbb{Z}$
6) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
7 $]0,+\infty[$

Réponse

1) $[0,1]$
2) $\mathbb{R}+$
3, 4) $[0,1]$
5) $\mathbb{Z}$
6) $\mathbb{R}$
7) $\mathbb{R}+$

4.5.4 La borne supérieure

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, $\sup A \in \overline{A}$.

4.5.5 Adhérence et intérieur

Soit A une partie de E, B son complémentaire dans E.

L'adhérence de B est le complémentaire de l'intérieur de A :

$$\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{o}{A}$$

Démonstration

$$a \notin \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \not\subset A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap B \neq \varnothing \Longleftrightarrow a \in \overline{B}$$

4.5.6 Caractérisation de l'adhérence

Théorème

- $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A.
- $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé dans E.

4.5.7 Exercice

Soit A et B deux parties de E ; comparer $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Réponse

$A \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$; de même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Inversement, $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, qui est fermé dans E ; donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

4.5.8 Exercice

Soit A et B deux parties de E ; comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Réponse

$A \cap B \subset A$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$; de même, $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$; donc

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

Mais ils ne sont pas toujours égaux :

$A = [0, 1[$ et $B =]1, 2]$.

4.6 Frontière

4.6.1 Définition

Soit A une partie de E ; on appelle frontière de A :

$$\mathrm{Fr} A = \partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

Soit B le complémentaire de A dans E ;

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Par conséquent, A et B ont la même frontière, et c'est un fermé de E.

4.6.2 Exemples

Trouver la frontière des parties suivantes de $\mathbb{R}$

1) $]0,1[$
2) $]0,+\infty[$
3) $\mathbb{Z}$
4) $\mathbb{Q}$

Réponse

1) $\{0,1\}$
2) $\{0\}$
3) $\mathbb{Z}$
4) $\mathbb{R}$

4.7 Changement de norme

Théorème

Deux normes équivalentes sur E définissent les mêmes notions topologiques suivantes :

ouverts, fermés, adhérence, intérieur, frontière, limites, continuité, continuité uniforme, voisinages, parties bornées...

Démonstration

Soit $\|\|_1$ et $\|\|_2$ deux normes équivalentes sur E. Soit $k>0$ tel que

$$\|\|_2 \leq k.\,\|\|_1$$

Considérons

$$\begin{aligned} f : (E,\|\|_1) &\to (E,\|\|_2) \\ x &\to x \end{aligned}$$

f est $k-$lipschitzienne, donc continue.

Donc tout ouvert pour $\|\|_2$ est ouvert pour $\|\|_1$, car image réciproque par f d'un ouvert.

De manière analogue, tout ouvert pour $\|\|_1$ est ouvert pour $\|\|_2$.

5 Suites et topologie

5.1 Adhérence

Théorème

Soit A une partie de E ; soit $a \in E$.

$a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a.

Démonstration

Soit $a \in \overline{A}$; pour tout $n \geq 1$,

$$B\left(a,\frac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing$$

Soit donc u_n un élément de $B\left(a,\frac{1}{n}\right) \cap A$; la suite (u_n) convient.

Réciproque ?

Théorème

Soit A une partie de E.

A est fermée dans E si et seulement si, pour toute suite d'éléments de A convergente, la limite est dans A.

5.2 Densité

5.2.1 Définition

Soit A et B deux parties de E ; on dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.

5.2.2 Caractérisation séquentielle

A est dense dans B si et seulement si tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.

5.2.3 Rationnels

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour $n \geq 1$, soit $a_n = 10^{-n} E\left(10^n a\right)$.

$$\forall n \geq 1,\ E\left(10^n.a\right) \leq 10^n.a < E\left(10^n.a\right) + 1$$

D'où :

$$\forall n \geq 1,\ a_n \leq a < a_n + \frac{1}{10^n}$$

D'où

$$\forall n \geq 1,\ a - \frac{1}{10^n} < a_n \leq a$$

5.2.4 Irrationnels

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit a un réel, (r_n) une suite de rationnels convergeant vers $a - \sqrt{2}$.

Alors $\left(r_n + \sqrt{2}\right)$ converge vers a.

5.2.5 Sous-espace vectoriel

Exercice

Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de E.

Alors $A = E \setminus F$ est dense dans E.

Démonstration

Soit $e \in E \setminus F$; soit $x \in F$; soit

$$x_n = x + \frac{1}{n} e$$

(x_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Remarque

Soit A une partie quelconque de E.

A est dense dans E si et seulement si son complémentaire est d'intérieur vide.

Donc un sous-espace de E autre que E est d'intérieur vide.

5.3 Les valeurs d'adhérence d'une suite

Exercice

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$; soit $a \in E$.

Montrer que a est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si

$$\forall n \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \exists p \geq n, \|u_p - a\| \leq \varepsilon$$

A l'aide de

$$X_n = \{u_p / p \geq n\}$$

montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un fermé de E.

Réponse

L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est :

$$\bigcap_{n \geq 0} \overline{X_n}$$

5.4 Exercice : les fonctions strictement positives

Soit $I = [0, 1]$ et $E = C(I, \mathbb{R})$; soit

$$U = \{f \in E / \forall t \in I, f(t) > 0\}$$

U est-il ouvert dans E ?

1er cas : $\|\|\|_\infty$.

Soit $f \in U$.

Trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(f, \varepsilon) \subset U$ et en déduire que U est ouvert dans E.

Réponse

$$\varepsilon = \min_I f$$

2e cas : $\|\|\|_1$.

Soit $f \in U$; construire une suite (f_n) d'éléments de $E \setminus U$ convergeant vers f.

Montrer que U n'est pas ouvert dans E ; quel est son intérieur ?

Réponse

Soit h_n continue affine par morceaux, nulle sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, telle que

$$h_n(0) = f(0)$$

Plus précisément :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], h_n(t) = f(0) . (1 - nt)$$

Soit $f_n = f - h_n$; on constate que :

$$\forall n \geq 1, f_n \notin U$$

(car $f_n(0) = 0$).

$$\forall n \geq 1, \|f - f_n\|_1 = \|h_n\|_1 = \frac{f(0)}{2n}$$

Donc $E \setminus U$ est dense dans E, ce qui équivaut à U d'intérieur vide.

6 Topologie induite

E est un espace normé, et A une partie de E.

6.1 Boules

$B_A(a,\varepsilon) = A \cap B(a,\varepsilon)$.

Corollaire

Les voisinages de a dans A sont les intersections avec A des voisinages de a dans E.

6.2 Ouverts relatifs

6.2.1 Théorème 1

Les ouverts de A sont les intersections avec A des ouverts de E.

On dit aussi les traces sur A des ouverts de E.

Démonstration

Soit

$$f : \begin{array}{c} A \to E \\ x \to x \end{array}$$

Soit U un ouvert de E ; pourquoi $U \cap A$ est-il un ouvert de A ?

Réponse

$U \cap A$ est l'image réciproque de U par f.

Soit maintenant V un ouvert de A ; on sait que V est une union de boules ouvertes :

$$V = \bigcup_{i \in I} B_A(a_i, r_i)$$

Donc

$$V = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i) \right)$$

Remarque

Un ouvert de E contenu dans A est ouvert dans A.

6.2.2 Théorème 2

Dans le cas où A est un ouvert de E :

les ouverts de A sont les ouverts de E contenus dans A.

6.3 Fermés relatifs

6.3.1 Théorème 1

Les fermés de A sont les intersections avec A des fermés de E.

On dit aussi les traces sur A des fermés de E.

Remarque

Un fermé de E contenu dans A est fermé dans A.

6.3.2 Théorème 2

Dans le cas où A est un fermé de E, les fermés de A sont les fermés de E contenus dans A.

6.3.3 Caractérisation séquentielle des fermés de A

Théorème

Soit B une partie de A.

B est fermée dans A si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de B qui converge vers une limite a dans A, a appartient à B.

6.4 La topologie de $\mathbb{Z}$

Exercice

Dans $A = \mathbb{Z}$, chercher les boules, les ouverts, et les fermés.

Réponse

Soit $n \in \mathbb{Z}$;

$$\{n\} =]n-1, n+1[\cap \mathbb{Z}$$

ce qui prouve que $\{n\}$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$.

On en déduit par réunion que toute partie est ouverte dans $\mathbb{Z}$.

Par passage au complémentaire, on en déduit que toute partie est fermée dans $\mathbb{Z}$: on parle de topologie discrète.

7 Limites et continuité

7.1 Voisinages

7.1.1 Cas où $a \in E$

On dit que V est un voisinage de a dans E si V contient une boule de centre a et de rayon non nul :

$$\exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset V$$

7.1.2 Cas où $a = +\infty$

On dit que V est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ si

$$\exists b \in \mathbb{R},]b, +\infty[\subset V$$

7.1.3 Cas où $a = -\infty$

On dit que V est un voisinage de $-\infty$ dans $\mathbb{R}$ si

$$\exists b \in \mathbb{R},]-\infty, b[\subset V$$

7.1.4 Cas où $a = \infty$

On dit que V est un voisinage de l'infini dans E si

$$\exists b > 0, \forall x \in E, \|x\| > b \Rightarrow x \in V$$

Remarque

V est un voisinage de l'infini dans A si et seulement si son complémentaire dans E est... ?

Réponse

borné.

7.2 Limites

7.2.1 Définition

Soit A une partie de E ; soit $a \in \overline{A}$; soit f une application de A dans F.

On dit que

$$\lim_a f = l$$

si pour tout voisinage V de l dans F, il existe un voisinage U de a dans E tel que

$$f(A \cap U) \subset V$$

Cas particulier important

Dans l'étude de la convergence des suites, $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$.

7.2.2 Extension

Comment interpréter $a \in \overline{A}$ dans le cas où a est infini ?

Réponse

Pour $a = +\infty$: A non majoré ; pour $a = \infty$: A non borné.

7.2.3 Caractérisation séquentielle

Théorème

$$\lim_a f = L$$

si et seulement si, pour toute suite d'éléments de A convergeant vers a,

$$\lim_n f(u_n) = L$$

7.2.4 Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés

Théorème

Ici, $F = F_1 \times F_2$.

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

Dans ce cas :

$\lim_a f = (l_1, l_2)$ si et seulement si $\lim_a f_1 = l_1$ et $\lim_a f_2 = l_2$.

Démonstration

Découle de la caractérisation séquentielle.

7.2.5 Opérations algébriques sur les limites

Théorème

Si $\lim_a f = l$ et $\lim_a g = l'$, alors $\lim_a f + \lambda g = l + \lambda l'$.

7.2.6 Limite d'une composée

Théorème

Soit f une application de A dans B, et g une application de B vers F.

Si $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = l$, alors

$$\lim_a g \circ f = l$$

7.2.7 Continuité en un point et limite

Si $\lim\limits_{a} f = l$, et si de plus $a \in A$, alors

$$l = f(a)$$

Dans ce cas, f est continue au point a ; réciproquement, si f est continue au point a, $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

La continuité au point a équivaut donc à l'existence d'une limite finie dans le cas où $a \in A$.

Corollaire

Les propriétés précédentes s'appliquent à la continuité :

caractérisation séquentielle, opérations algébriques, composition...

7.3 Fonctions coïncidant sur une partie dense

Théorème

Soit B partie dense de A ; soit f et g deux applications de A dans F continues qui coïncident sur B. Alors

$$f = g$$

Démonstration 1

Soit $a \in A$; soit (b_n) une suite d'éléments de B qui converge vers a ; alors

$$\forall n \geq 0,\ f(b_n) = g(b_n)$$

Il suffit de passer à la limite.

Démonstration 2

Que dire de $(f-g)^{-1}\{0\}$?

C'est un fermé de A qui contient B, donc c'est A.

7.4 Endomorphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$

Exercice important

Les seuls endomorphismes de groupes continus f de $(\mathbb{R}, +)$ sont les

$$f_a : t \to at$$

où a décrit $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit F une primitive de f. De

$$(H) : \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

on déduit, en intégrant sur $[0,1]$ par rapport à y :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+1) - F(x) = f(x) + F(1) - F(0)$$

Ceci montre que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On revient à (H) ; en dérivant par rapport à y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f'(x+y) = f'(y)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(0)$$

Conclusion ?