Normes

1 $\sup\limits_{[0,1]} |P - P'|$

Pour tout $P \in E = \mathbb{R}[\mathbb{X}]$, on note $\|P\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |P|$ et $\|P\| = \sup\limits_{[0,1]} |P - P'|$.

1. Montrer qu'on définit ainsi deux normes sur E.
2. Les comparer.

Réponse

Soit

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

On constate que $\|P_n\|_\infty \sim e$ et $\|P_n\| = \frac{1}{n!}$.

De même, soit

$$Q_n = X^n$$

On constate que $\|Q_n\|_\infty = 1$ et pour $n \geq 2$, $\|Q_n\| = n - 1$.

2 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$

On note $E = l^\infty$ l'ensemble des suites de réels bornées ; soit

$$F = \{u \in E / \, u_0 = 0\}$$

Pour $u \in E$, on note $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Pour $u \in F$, on note $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1. Montrer que $\|\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que $\|\|$ est une norme sur F.
3. Comparer ces deux normes sur F.

Réponse

Il est clair que sur F :

$$\|\| \leq 2. \|\|_\infty$$

Fixons $n \geq 1$ et définissons $u \in F$ par

- $u_k = k$ si $0 \leq k \leq n$
- $u_k = n$ si $n \leq k$

On constate que $\|u\|_\infty = n$ et $\|u\| = 1$; les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

3 $\left\|M^2\right\| = \|M\|^2$

1- Existe-t-il une norme sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in E, \left\|f^2\right\| = \|f\|^2$$

2- Existe-t-il une norme sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall f, g \in E, \|f.g\| = \|f\| . \|g\|$$

3- Existe-t-il une norme sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in E, \left\|M^2\right\| = \|M\|^2$$

4- Existe-t-il une norme sur $E = S_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in E, \left\|M^2\right\| = \|M\|^2$$

5- Soit X un ensemble fini. Chercher les normes $\|\|$ sur $E = \mathbb{R}^X$ telles que :

$$\forall f \in E, \left\|f^2\right\| = \|f\|^2$$

Indications

1- Oui.
2- Non.
3- Non si $n \geq 2$. Penser aux matrices nilpotentes.
4- Oui, le rayon spectral qui coïncide sur $S_n(\mathbb{R})$ avec la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique.
5- Il n'y en a qu'une.

4 $\|u\| = \|f.u\|_\infty$

Soit $I = [a, b]$ un segment infini et $E = C(I, \mathbb{R})$; soit f un élément de E.
Pour $u \in E$, on pose

$$\|u\| = \|f.u\|_\infty$$

1- A quelle condition $\|\|$ est-elle une norme sur E ?
2- A quelle condition $\|\|$ est-elle une norme sur E équivalente à $\|\|_\infty$?

Indications

1- Soit

$$Z = \{t \in I / f(t) = 0\}$$

$\|\|$ est une norme sur E si et seulement si Z est d'intérieur vide, autrement dit ne contient aucun intervalle non trivial.
2- $\|\|$ est une norme sur E équivalente à $\|\|_\infty$ si et seulement si Z est vide.

5 La boule caractérise la norme

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. Soit

$$B_1 = \{x \in E / N_1(x) < 1\}, B_2 = \{x \in E / N_2(x) < 1\}$$

On suppose $B_1 = B_2$; montrer que $N_1 = N_2$.

Indications

Soit x élément non nul de E ; soit $y = \frac{x}{N_1(x)}$. $y \notin B_1$, donc $y \notin B_2$. Donc

$$N_2\left(\frac{x}{N_1(x)}\right) \geq 1$$

AQT...

6 Si la boule est convexe

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et

$$N = \|\| : E \to \mathbb{R}+$$

une application qui vérifie :

$$\forall \in E \setminus \{0\}, \ N(x) > 0$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$$

On suppose de plus que la boule

$$B = \{x \in E / \, N(x) \leq 1\}$$

est convexe.

Montrer que N est une norme.

Indications

Soit x et y deux éléments non nuls de E.

Soit

$$x_1 = \frac{x}{N(x)}, \ y_1 = \frac{y}{N(y)}$$

On vérifie que x_1 et y_1 sont dans B et on remarque que

$$\frac{x+y}{N(x)+N(y)} = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)} x_1 + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)} y_1$$

donc appartient à B.

7 Isométries de $(\mathbb{R}^n, \|\|_\infty)$

On appelle isométrie toute application linéaire bijective de $(\mathbb{R}^n, \|\|_\infty)$ dans lui-même qui conserve la norme.

Trouver le nombre d'isométries.

Indications

On note $(e_1, e_2, ...e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Utiliser les $e_i \pm e_j$.

Il y en a $2^n.n!$

8 (X^n) tend vers n'importe quoi

Soit P un élément de $E = \mathbb{R}[X]$; soit d son degré.

1- On pose $Q_k = X^k$ si $k \leq d$ et $Q_k = X^k - P$ si $k > d$. Montrer que $(Q_k)_{k \geq 0}$ est une base de E.

2- Pour $Q = \sum_{k \geq 0} a_k Q_k$, on pose

$$\|Q\| = \max \left\{ \frac{|a_k|}{2^k} / \, k \geq 0 \right\}$$

Montrer qu'on définit ainsi une norme sur E.

3- Etudier la convergence de (X^n) pour cette norme.