Séries

1 Indices pairs et impairs

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
1- Si $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent, peut-on en déduire que $\sum u_n$ converge ?
2- Eudier la réciproque.

Indications

1- Vrai.
2- Faux, exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

2 $u_n \leq v_n \leq w_n$

Soit (u_n), (v_n), (w_n) 3 suites de réels. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq v_n \leq w_n$$

et que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent.
Que dire de $\sum v_n$?

Indications

$$0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$$

3 $\sum \sin \pi \sqrt{n^2+1}$

Trouver la nature de la série de terme général

$$u_n = \sin \pi \sqrt{n^2+1}$$

Indications

$$\forall n \geq 1, u_n = \sin \pi \sqrt{n^2+1} = \sin \pi . n . \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = \sin \left[n\pi \left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right]$$

Donc :

$$u_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Conclusion : $\sum u_n$ converge (semi-convergente).

4 $u_{n+1} = \frac{1}{n}.\exp(-u_n)$

On définit (u_n) par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n}.\exp(-u_n)$ pour tout $n \geq 1$.
Etudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Indications

On vérifie que (u_n) est bien définie.

$$\forall n \geq 1, u_n > 0$$

Donc :

$$\forall n \geq 1, 0 < u_{n+1} < \frac{1}{n}$$

Donc (u_n) tend vers 0, d'où $u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

Conclusion : $\sum u_n$ diverge.

Ensuite :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n}.\left(1 + O\left(u_n\right)\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc

$$(-1)^{n+1} u_{n+1} = (-1)^{n+1}.\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente, donc converge.

5 $\sum \cos\left(\pi n^2.\ln\frac{n}{n-1}\right)$

Nature de la série de terme général

$$u_n = \cos\left(\pi n^2.\ln\frac{n}{n-1}\right)$$

Indications

$$\forall n \geq 2, u_n = \cos\left(\pi n^2.\ln\frac{n}{n-1}\right) = \cos\left(\pi n^2.\ln\frac{n-1}{n}\right) = \cos\left(\pi n^2.\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$\forall n \geq 2, u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Donc :

$$\forall n \geq 2, u_n = (-1)^n.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}.\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc :

$$\forall n \geq 2, u_n = v_n + w_n$$

où v_n est le terme général d'une série qui converge d'après le critère des séries alternées, et w_n est le terme général d'une série qui converge car absolument convergente.

Donc $\sum u_n$ converge.

6 $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$

On définit (u_n) par $u_0 > 0$, et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie, et qu'elle tend vers $+\infty$.
2. Montrer que (u_n) n'est pas décroissante, puis qu'elle est croissante à partir d'un certain rang.
3. En déduire que (u_n) est dominée par $(\sqrt{n})$, puis trouver un équivalent de (u_n).
4. Nature de $\sum \frac{1}{u_n^2}$, de $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$?

Indications

1. $\forall n \geq 0, u_n \geq \sqrt{n}$.

2. Il est clair que (u_n) n'est pas décroissante. Soit $p \geq 0$ tel que $u_p \leq u_{p+1}$; montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq p,\ u_n \leq u_{n+1}$$

C'est vrai pour $n = p$; soit $n \geq p$ tel que $u_n \leq u_{n+1}$; alors :

$$n + 1 + u_n \leq n + 2 + u_{n+1}$$

D'où $u_{n+1} \leq u_{n+2}$; le résultat est démontré.

3. A partir d'un certain n_0 : $u_n \leq u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n}$; donc

$$u_n^2 \leq n + 1 + u_n$$

Soit $P = X^2 - X - (n+1)$; $P(u_n) \leq 0$; or les racines de P sont

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(n+1)}}{2}$$

Donc :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4(n+1)}}{2}$$

Sachant que $u_{n-1} = O(\sqrt{n})$, on obtient

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \sim \sqrt{n}$$

4. $\frac{1}{u_2^2} \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum \frac{1}{u_n^2}$ diverge ; $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$ converge d'après le critère des séries alternées.

7 $\quad S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

On note

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1- Montrer que $(H_n - \ln(n))$ converge vers une limite γ.

2- En déduire la valeur de S.

8 $\quad \sum (-1)^n . n^\alpha . \int_n^\infty \frac{\ln t}{t(t+1)} \mathrm{d}t$

Nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n . n^\alpha . \int_n^\infty \frac{\ln t}{t(t+1)} \mathrm{d}t$$

Indications

Soit $I_n = \int_n^\infty \frac{\ln t}{t(t+1)} \mathrm{d}t$ et $J_n = \int_n^\infty \frac{\ln t}{t^2} \mathrm{d}t$.

Par intégration par parties :

$$J_n = \frac{1 + \ln n}{n}$$

De plus :

$$0 \leq J_n - I_n = \int_n^\infty \frac{\ln t}{t^2(t+1)} \mathrm{d}t \leq \int_n^\infty \frac{\ln t}{t^3} \mathrm{d}t = K_n = \frac{1 + 2\ln n}{4n^2}$$

Donc

$$I_n = \frac{1 + \ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

On en déduit que :

- si $\alpha < 0$, $\sum u_n$ est absolument convergente.
- si $\alpha \geq 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- si $0 \leq \alpha < 1$, $\sum u_n$ est semi-convergente.

9 $\sum \frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}...+(-1)^{n-1}\sqrt{n}}$

Nature de la série $\sum \frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}...+(-1)^{n-1}\sqrt{n}}$?

Indications

Notons $t_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}... + (-1)^{n-1}\sqrt{1}$; on peut écrire

$$t_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}... + (-1)^{n-1}\sqrt{1} = \frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)... + \frac{(-1)^{n-2}}{2}\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sqrt{1}$$

ou encore

$$t_n = \frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left[\sqrt{1} - \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + ... + (-1)^{n-1}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\right] = \frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{2}u_n$$

où (u_n) est la suite des sommes partielles d'une série qui converge d'après le critère des séries alternées.

Donc :

$$t_n = \frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(u + o\left(1\right)\right)$$

où u est une constante dont on vérifie qu'elle est non nulle.

Pour finir :

$$a_n = \frac{1}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}... + (-1)^{n-1}\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{n-1}}{t_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{\frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(u + o\left(1\right)\right)}$$

D'où, après calculs :

$$a_n = 2\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{2u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Conclusion : $\sum a_n$ diverge.