Espaces préhilbertiens réels

Contents

1 Espaces vectoriels euclidiens

1.1 Produit scalaire

Définition

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel ; un produit scalaire φ sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Positive :

$$\forall x \in E, \, \varphi(x, x) \geq 0$$

Définie positive :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \, \varphi(x, x) > 0$$

1.2 Les produits scalaires canoniques

1.2.1 Dans $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j . y_j$$

1.2.2 Dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\langle X, Y \rangle = X^T . Y = \sum_{j=1}^{n} x_j . y_j$$

1.2.3 Dans $M_{p,q}(\mathbb{R})$

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Tr}\left(X^T . Y\right) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} x_{k,i} . y_{k,i}$$

Explication

Notons $M = X^T . Y$.

Alors

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \left(X^T\right)_{i,k} Y_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} x_{k,i} . y_{k,j}$$

D'où

$$\operatorname{Tr} M = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} x_{k,i} . y_{k,i}$$

1.2.4 Dans $\mathbb{R}[X]$

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} p_j . q_j$$

1.3 Exemple dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$

Soit $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $I = [a, b]$ à valeurs réelles.

Soit $\omega \in E$; on pose

$$\varphi(f, g) = \langle f, g \rangle = \int_I f g \omega$$

A quelles conditions est-ce une forme bilinéaire positive ? Définie positive ?

Réponse

φ est positive si et seulement si $\omega \geq 0$.
φ est définie positive si et seulement si
- $\omega \geq 0$
- $\{x \in I/\omega(x) > 0\}$ est une partie dense dans I.

1.4 Familles orthogonales

Théorème

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Démonstration

Il suffit de le démontrer pour les familles finies.

Donc soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Supposons

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j = 0$$

On calcule le produit scalaire avec x_k :

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j,\, x_k \right\rangle = \lambda_k \langle x_k, x_k \rangle = \lambda_k \|x_k\|^2$$

Les x_k étant non nuls, les λ_k le sont.

Donc la famille $(x_1, ..., x_p)$ est libre.

1.5 Existence de bases orthonormées

1.5.1 Définition

Un espace vectoriel euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

1.5.2 Existence de bases orthonormées

Théorème

Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormée (ou orthonormale).

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$.

C'est clair pour $n = 1$; soit $n \geq 2$; supposons la propriété vérifiée au rang $n-1$; soit E de dimension n ; E contient un vecteur e_1 de norme 1 ; soit

$$f : x \to \langle e_1, x \rangle$$

f est une forme linéaire non nulle, dont le noyau H est un hyperplan de E, auquel on applique l'hypothèse de récurrence : H possède une base orthonormée $(e_2, ..., e_n)$.

On vérifie alors que $(e_1, e_2, ...e_n)$ est une base orthonormale de E.

1.5.3 Calcul dans une base orthonormale

Soit $B = (e_1, e_2, ...e_n)$ une base orthonormale de E, x, y, deux éléments de E, u un élément de $L(E)$.

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j.e_j$$

avec

$$x_j = \langle e_j, x \rangle$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j.y_j = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x\rangle \langle e_j, y\rangle$$

Tru ?

$$\mathrm{Tr}u = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, u(e_j)\rangle$$

$\|x\|$?

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.6 L'isomorphisme canonique

Soit E un espace euclidien ; soit $E^* = L(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur E ; pour $a \in E$, notons

$$\varphi_a : x \to \langle a, x\rangle$$

Alors

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \to & E^* \\ & a & \to & \varphi_a \end{array}$$

est un isomorphisme de E sur E^*.

1.7 Matrice d'un produit scalaire

Soit E un espace euclidien et $B = (e_1, e_2, ...e_n)$ une base de E. On appelle matrice du produit scalaire dans la base B la matrice M dont les coefficients sont :

$$m_{i,j} = \langle e_i, e_j\rangle$$

A quelle condition B est-elle orthonormale ? Orthogonale ?

Réponse

B est orthonormale si et seulement si $M = I_n$.

B est orthogonale si et seulement si M est diagonale.

Expression du produit scalaire dans une base

Si X et Y sont les coordonnées de x et y dans la base B, alors :

$$\langle x, y\rangle = X^T.M.Y$$

Si B est orthonormale, on retrouve la formule :

$$\langle x, y\rangle = X^T.Y$$

1.8 Le déterminant de Gram

Soit $x_1, ..., x_p$ des vecteurs de E espace euclidien ; on note $a_{i,j} = x_i.x_j$ et

$$\mathrm{Gr}(x_1, ..., x_p) = \det A$$

1.8.1 Exercice 1

Montrer que $(x_1, ..., x_p)$ liée si et seulement si $\det A = 0$.

Démonstration

Supposons la famille liée : soit $T = (t_1, ..., t_p)$ non nul tel que

$$\sum_{i=1}^{p} t_i x_i = 0$$

Soit $Y = AT$:

$$\forall i,\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} t_j = \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{p} t_j x_j \right\rangle = 0$$

Donc $T \in \operatorname{Ker} A \setminus \{0\}$, donc $\det A = 0$.

Réciproquement

Supposons $\det A = 0$; soit $T \in \operatorname{Ker} A \setminus \{0\}$. Notons

$$s = \sum_{i=1}^{p} t_i x_i$$

Avec un calcul analogue, et déjà vu :

$$T^T.A.T = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} t_i t_j = \|s\|^2$$

Donc $s = 0$; la famille est donc liée.

1.8.2 Exercice 2

On suppose $(x_1, ..., x_p)$ libre ; montrer que

$$\operatorname{Gr}(x_1, ..., x_p) = \det A > 0$$

Démonstration

$(x_1, ..., x_p)$ est une base d'un sous-espace F ; soit B une base orthonormée de F.

Soit P la matrice de passage de B à $(x_1, ..., x_p)$; on va montrer que

$$A = P^T.P$$

et donc $\det A > 0$.

Notons $(f_1, f_2, ... f_p)$ les formes linéaires coordonnées dans la base B.

$$a_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{p} f_k(x_i).f_k(x_j) = \sum_{k=1}^{p} p_{k,i}.p_{k,j}$$

Remarque

A quoi fait penser la formule ${}^tP.P$?

Si $(x_1, ..., x_p)$ est une base orthonormale de F :

$$A = {}^tP.P = I_p$$

c'est la définition des matrices orthogonales.

2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

2.1 Orthogonal d'un sous-espace

Soit E un espace préhilbertien ; soit F un sous-espace vectoriel de E.

On note

$$F^{\perp} = \{x \in E / \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$$

Premières propriétés :
- $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F \cap F^{\perp} = \{0\}$: F et $F^{\perp}$ sont toujours en somme directe.
- Si $F \subset G$, alors $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

2.2 Cas particulier : hyperplan d'un espace euclidien

Théorème

Soit E un espace euclidien ; soit $H \subset E$ un hyperplan.

Alors $H^{\perp}$ est un supplémentaire de H dans E.

Démonstration

Soit $(e_1, e_2, ...e_{n-1})$ une base de H. Soit

$$\begin{array}{cccc} u: & E & \to & \mathbb{R}^{n-1} \\ & x & \mapsto & (\langle e_j, x \rangle)_{1 \leq j \leq n-1} \end{array}$$

u est linéaire, et $\operatorname{Ker} u = H^{\perp} \neq \{0\}$; donc $H^{\perp}$ est une droite vectorielle.

2.3 Orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

2.3.1 Théorème

Soit E un espace préhilbertien ; soit F un sous-espace de dimension finie.

Alors $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F dans E.

2.3.2 Rappel

$$F \cap F^{\perp} = \{0\}$$

est toujours vérifié, même si F n'est pas de dimension finie.

2.3.3 Démonstration 1

Soit $a \in E \setminus F$; notons

$$F_a = F + \mathbb{R}a$$

F est un hyperplan de F_a, donc d'après le cas particulier,

$$F_a = F + D$$

où D est une droite de vecteurs orthogonaux à F, c'est-à-dire

$$D \subset F^{\perp}$$

Donc tout vecteur de F_a, a en particulier, est somme d'un élément de F et d'un élément de $F^{\perp}$.

2.3.4 Démonstration 2

Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormée de F ; soit $x \in E$; soit $x_k = \langle e_k, x \rangle$ et

$$y = \sum_{k=1}^{p} x_k . e_k = \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x \rangle \, e_k$$

Posons $z = x - y$; on vérifie que : $\forall j \leq p, \langle e_j, z \rangle = 0$. Donc

$$z \in F^{\perp}$$

2.3.5 Dimension de l'orthogonal

Si E est de dimension finie n, F de dimension p, alors $\dim F^{\perp} = n - p$.

2.3.6 Exercice : $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$

Montrer que pour tout sous-espace F de E, $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et que si de plus F est de dimension finie,

$$F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$$

Démonstration

Montrons que $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$:

Tout vecteur $x \in F$ est orthogonal à tout vecteur de $F^{\perp}$, x est donc dans $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Supposons de plus F de dimension finie. Soit $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

$$x = y + z$$

avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Alors :

$$z \in F^{\perp} \cap \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$$

Donc $z = 0$; finalement $x \in F$.

2.4 L'orthogonal n'est pas toujours un supplémentaire

2.4.1 Exemple dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire canonique :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{j \geq 0} p_j . q_j$$

Soit F l'ensemble des polynômes nuls au point 1 ; montrer que F est un hyperplan, et que $F^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration

F est un hyperplan car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle :

$$\varphi : P \to P(1)$$

Soit $P \in F^{\perp}$; $P = \sum_{k \geq 0} p_k . X^k$; notons $Q_n = X^n - 1$ pour $n \geq 1$.

$$\forall n \geq 1, \langle P, Q_n\rangle = p_n - p_0 = 0$$

La suite des coefficients de P est constante, donc nulle : $P = 0$.

Conclusion : $F^{\perp} = \{0\}$.

Remarque

On pourrait montrer que $(Q_n)_{n \geq 1}$ est une base de F.

2.4.2 Exemple dans $C^0([0,1])$

Soit $E = C^0([0,1])$; on définit un produit scalaire sur E par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f.g$$

Soit $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$; montrer que F est un hyperplan, et que

$$F^{\perp} = \{0\}$$

Démonstration

Soit $f \in F^{\perp}$; soit $g : t \to t.f(t)$; $g \in F$, donc

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f.g = \int_0^1 t.f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Donc f est nulle sur $]0,1]$, d'où $f = 0$.

Conclusion : $F^{\perp} = \{0\}$.

2.5 Projection orthogonale sur F

2.5.1 Définition

Soit E un espace préhilbertien ; soit F un sous-espace de dimension finie ; on appelle projection orthogonale sur F le projecteur d'image F, de noyau $F^{\perp}$.

2.5.2 Caractérisation

Théorème

$y = p_F(x)$ est le point unique de F qui vérifie

$$\|x - y\| = d(x, F)$$

Démonstration

Soit $y' \in F$, distinct de y ; $\|x - y'\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - y'\|^2 > \|x - y\|^2$.

2.6 Inégalité de Bessel

Théorème

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de F ; soit $x \in E$; notons

$$x_k = \langle e_k, x \rangle$$

Alors :

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Plus précisément, soit $y = p_F(x)$; alors $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, et :

$$\|x\|^2 = d^2(x, F) + \|y\|^2$$

2.7 Méthode des moindres carrés

Exercice

Soit $n \geq 2$; soit $x_1, ..., x_n$ des réels distincts et $y_1, ..., y_n$ des réels quelconques.

Pour u, v réels, on note :

$$s(u, v) = \sum_{i=1}^{n} (ux_i + v - y_i)^2$$

On cherche la borne inférieure de s.

Réponse

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique ; on note :

$X = (x_1, ..., x_n)$; $Y = (y_1, ..., y_n)$; $U = (1, ..., 1)$; $F = \mathrm{Vect}(X, U)$.

$$s(u, v) = \|Y - u.X - v.U\|^2$$

On sait donc que s atteint un minimum en un point unique (u, v) qui est la solution de

$$\begin{cases} Y - uX - vU \perp X \\ Y - uX - vU \perp U \end{cases}$$

Autre méthode

On peut chercher les points où les dérivées partielles sont nulles ; on retrouve (u, v) ; mais cette méthode ne prouve rien...

2.8 Retour au Gram

Exercice

Soit F le sous-espace engendré par $(x_1, ..., x_p)$; soit $a \in E$; alors :

$$Gr\left(a, x_1, ..., x_p\right) = Gr\left(x_1, ..., x_p\right).d^2\left(a, F\right)$$

Démonstration

On suppose $(x_1, ..., x_p)$ libre ; on écrit $a = b + c$, avec $b \in F$ et $c \in F^\perp$; en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne :

$$Gr\left(a, x_1, ..., x_p\right) = Gr\left(b, x_1, ..., x_p\right) + \|c\|^2 Gr\left(x_1, ..., x_p\right) = \|c\|^2 Gr\left(x_1, ..., x_p\right)$$

2.9 Orthonormalisation

2.9.1 Introduction

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace euclidien ; notons $F_0 = \{0\}$ et F_k le sous espace vectoriel engendré par $(e_1, ..., e_k)$ pour $1 \le k \le n$:

$$F_k = \mathrm{Vect}\left(e_1, e_2, ...e_k\right)$$

F_{k-1} est un hyperplan de F_k.

La normale D_k possède deux vecteurs unitaires ; appelons u_k celui qui vérifie

$$\langle e_k, u_k \rangle > 0$$

Existence ?

$(u_1, ..., u_k)$ est alors une base orthonormale de F_k.

$B_o = (u_1, ..., u_n)$ est une base orthonormale de E.

2.9.2 La matrice de passage

La matrice de passage M de B_o à B est triangulaire supérieure, pourquoi ?

Que dire des coefficients diagonaux ?

Réponse

$m_{i,i} = \langle u_i, e_i \rangle > 0$. Que dire de la matrice de passage de B à B_o ?

2.9.3 L'algorithme de Schmidt

u_1 est le vecteur unitaire associé à e_1.

Pour $k > 1$: on calcule le projeté orthogonal p_k de e_k sur F_{k-1} :

$$p_k = \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_j, e_k \rangle u_j, \ v_k = e_k - p_k$$

u_k est le vecteur unitaire associé à v_k :

$$u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

2.9.4 Variante

On peut éviter de calculer les $\|v_k\|$ de la manière suivante :

On définit

$$v_1 = e_1$$

et pour $k > 1$:

$$p_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_j, e_k \rangle}{\|v_j\|^2} v_j, \; v_k = e_k - p_k$$

3 Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel

3.1 Définition

On dit qu'une suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est totale si le sous-espace F engendré par cette suite est dense dans E.

Remarque

Que dire dans le cas où E est de dimension finie ?

Réponse

F est aussi de dimension finie, donc fermé dans E ; $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc totale si et seulement si elle est génératrice.

3.2 Théorème

Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E ; pour tout n de $\mathbb{N}$, notons p_n le projecteur orthogonal de E sur

$$F_n = \text{Vect}\,(e_0, ..., e_n)$$

Alors, pour tout x de E, $(p_n(x))$ converge vers x.

Démonstration

Soit $x \in E$; soit $\varepsilon > 0$; il existe y élément de F tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$; il existe n tel que $y \in F_n$; alors :

$$\forall m \geq n, \; \|x - p_m(x)\| \leq \|x - y\| \leq \varepsilon$$

En effet

$$y \in F_m$$

Remarque

Où sert le caractère orthonormal de $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$?

Réponse

Il ne sert pas.

3.2.1 Corollaire

Soit $x \in E$; soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale d'éléments de E.

Notons

$$x_k = \langle e_k, x \rangle$$

On sait déjà que, pour tout $n \geq 0$,

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \|p_n(x)\|^2$$

Supposons de plus que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale ; on sait que $(p_n(x))$ converge vers x ; conclusion :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = \lim_n \|p_n(x)\|^2$$

3.3 Les suites de polynômes orthogonaux

3.3.1 Le produit scalaire

Soit I un intervalle, et une fonction $\omega > 0$ et continue sur I ; on définit un produit scalaire par

$$\langle f, g\rangle = \int_I fg\omega$$

sur un espace vectoriel E ; lequel ?

Réponse

E est l'ensemble des fonctions f continues sur I, telles que

$$f^2.\omega$$

soit intégrable.

$$\forall x \in I, |f(x) + g(x)|^2 \leq 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2$$

$$\forall x \in I, |f(x).g(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2$$

Dans la suite,

on supposera que E contient $F = \mathbb{R}[X]$; c'est le cas en particulier si I est un segment.

3.3.2 La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On notera $e_k = X^k$, et

$$F_n = \mathbb{R}_n[X]$$

le sous espace vectoriel engendré par $(e_0, ..., e_n)$.

Soit $n \geq 1$; dans F_n, F_{n-1} est un hyperplan ; la normale D_n possède deux vecteurs unitaires.

On choisit pour P_n celui qui vérifie

$$\langle e_n, P_n\rangle > 0$$

3.3.3 Propriétés de la suite (P_n)

Par construction, c'est une base orthonormée de F ; P_n est de degré n ; son terme dominant est strictement positif ; et surtout,

$$P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Que dire de la matrice de passage de $(e_0, ..., e_n)$ à $(P_0, ..., P_n)$?

Réponse

Elle est triangulaire supérieure, à diagonale strictement positive.

3.3.4 Exemple : les polynômes de Tchebytchev

$I = \left]-1,1\right[$; $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$; T_n défini par

$$T_n(\cos t) = \cos nt$$

Montrer que :
- $\mathbb{R}[X] \subset E$.
- T_n est de degré n.
- $\langle T_p, T_q \rangle$ est nul si $0 \leq p < q$.

3.3.5 Un cas où $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale

Exercice

Si I est un segment, $I = [a,b]$, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $E = C^0(I,\mathbb{R})$.

Démonstration

Le sous espace $F = \mathbb{R}[X]$ engendré par cette suite est dense dans

$$E = C^0(I,\mathbb{R})$$

pour $\|\|_\infty$ d'après le théorème de Weierstrass.

De plus

$$\exists C > 0, \forall f \in E, \|f\| \leq C.\|f\|_\infty$$

Par exemple, $C = \sqrt{\int_a^b \omega}$; on dit que $\|\|_\infty$ est plus fine que $\|\|$.

Si $\|g - Q_n\|_\infty$ tend vers 0, $\|g - Q_n\|$ aussi.

Remarque

Si I est quelconque, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas toujours totale.

3.4 Exercices : les zéros des polynômes orthogonaux

3.4.1 Leur nombre

Montrer que, si $n \geq 1$, P_n a au moins un zéro dans $\overset{\circ}{I}$; plus généralement, montrer que P_n a n racines simples dans $\overset{\circ}{I}$.

Démonstration

$\langle P_n, 1 \rangle = \int_I P_n.\omega = 0$; donc P_n a au moins un zéro dans $\overset{\circ}{I}$.

Soit $n \geq 2$; soit p le nombre de racines de P_n qui sont dans $\overset{\circ}{I}$ et qui sont de multiplicité impaire. Notons $a_1 < a_2 < ... < a_p$ ces racines et

$$Q = \prod_{j=1}^{p}(X - a_j)$$

Que dire de $\langle P_n, Q \rangle$?

$P_n.Q$ est non nul et de signe constant sur I, donc $\langle P_n, Q \rangle \neq 0$, donc $p \geq n$. Donc $p = n$.

3.4.2 Une relation de récurrence

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation :

$$\forall n \geq 1, P_{n+1} = \alpha_n X P_n + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}$$

De plus, $\alpha_n > 0$ et $\gamma_n < 0$.

Démonstration

Soit $n \geq 1$ fixé ; $(P_0, P_1, ..., P_n, X.P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$; on peut écrire

$$P_{n+1} = u_{n+1} X.P_n + ... + u_1 P_1 + u_0 P_0$$

Soit $j \leq n-2$.

$$0 = \langle P_{n+1}, P_j \rangle = u_j . \langle P_j, P_j \rangle$$

car

$$\langle XP_n, P_j \rangle = 0$$

Pourquoi ?

Réponse

$$\langle XP_n, P_j \rangle = \langle P_n, XP_j \rangle = 0$$

car $X.P_j \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3.4.3 Retour aux zéros

Pour $n \geq 2$, les zéros de P_{n-1} séparent ceux de P_n.

Démonstration

Par récurrrence sur n.

Cas où $n = 2$: soit c la racine de P_1 ; avec la relation de récurrence précédente, on constate que $P_2(c) < 0$; donc c est entre les deux racines de P_2.

Soit $n \geq 2$; supposons la propriété au rang n ; considérons $u < v$ deux racines consécutives de P_n ; d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P_{n-1}(u) . P_{n-1}(v) < 0$$

Avec la relation de récurrence vue plus haut :

$$P_{n+1}(u) . P_{n+1}(v) < 0$$

Il y a donc au moins une racine de P_{n+1} dans $]u, v[$; il reste à examiner les cas des deux dernières racines...

4 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

4.1 Définition

On dit qu'un endomorphisme u de E est symétrique si :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

4.2 Exercice

Soit u une application de E dans E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Montrer que u est un endomorphisme.

Démonstration

Pour $x, y, z \in E$:

$$\langle u(\lambda x + y), z \rangle = \langle \lambda . x + y, u(z) \rangle = \lambda \langle x, u(z) \rangle + \langle y, u(z) \rangle = \lambda \langle u(x), z \rangle + \langle u(y), z \rangle$$

D'où

$$\langle u(\lambda x + y) - \lambda . u(x) - u(y), z \rangle = 0$$

Pour conclure, un vecteur orthogonal à tout vecteur est en particulier orthogonal à lui-même, donc il est nul.

4.3 Matrice

Théorème

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E ; soit $u \in L(E)$; u est symétrique si et seulement si $M_B(u)$ est symétrique.

Important

B doit être orthonormée.

Démonstration

B étant orthonormée :

$$\forall i, j,\, m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$$

Par bilinéarité, la formule

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

est vérifiée sur E^2 si et seulement si elle est vérifiée sur B^2.

4.4 Projecteurs

4.4.1 Théorème

Soit p un projecteur ; p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est symétrique.

Démonstration

Supposons que p est symétrique ; soit x un élément du noyau, y un élément de l'image ; on considére $\langle x, p(y) \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle = 0$$

Réciproquement, supposons p orthogonal.

Soit $x = x_I + x_K$ et $y = y_I + y_K$ deux éléments de E.

$$\langle p(x), y \rangle = \langle x_I, y \rangle = \langle x_I, y_I + y_K \rangle = \langle x_I, y_I \rangle$$

car $\langle x_I, y_K \rangle = 0$. De même,

$$\langle x, p(y) \rangle = \langle x_I, y_I \rangle$$

Conclusion : p est symétrique.

Remarque

Se généralise au cas où E n'est pas de dimension finie.

4.4.2 Exercice

Soit p un projecteur ; montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est 1-lipschitzien.

Réponse

Soit x un élément du noyau, y un élément de l'image ;

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|p(x + ty)\| \leq \|x + ty\|$$

On élève au carré, on développe, on simplifie, et on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle \geq 0$$

D'où $\langle x, y \rangle = 0$.

4.5 Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable

Théorème

Soit $u \in L(E)$ symétrique ; si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

4.6 Lemme

Le spectre d'une matrice symétrique réelle A est contenu dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

A possède au moins une valeur propre complexe ; soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$AX = \lambda X$$

On en déduit successivement :

$$^{t}X.^{t}A = \lambda.^{t}X$$

$$^{t}\overline{X}.A = \overline{\lambda}.^{t}\overline{X}$$

$$^{t}\overline{X}.A.X = \overline{\lambda}.^{t}\overline{X}.X$$

$$\lambda.^{t}\overline{X}.X = \overline{\lambda}.^{t}\overline{X}.X$$

Or $^{t}\overline{X}.X = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 > 0$, donc λ est réel.

4.7 Théorème spectral

4.7.1 Théorème

Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.

De manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.

4.7.2 Interprétation matricielle

Théorème

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$; il existe une matrice orthogonale O et une matrice diagonale D telles que

$$M = O^{T}.D.O = O^{-1}.D.O$$

4.7.3 Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$. C'est clair pour $n = 1$.

Soit $n \geq 2$; supposons P_{n-1}. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n.

u admet au moins une valeur propre réelle, donc au moins un vecteur propre e_1 qu'on peut choisir unitaire ; e_1 engendre une droite D stable par u ; $D^{\perp} = H$ est également stable par u.

Il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à v, endomorphisme de H induit par u, après avoir vérifié que v est symétrique.

4.8 Endomorphismes positifs (exercices)

4.8.1 Caractérisation

Soit u un endomorphisme symétrique ; on dit que u est positif si :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle \geq 0$$

Montrer que u est positif si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{+}$.

Démonstration

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u.

$$\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . x_j^2$$

Le résultat en découle.

4.8.2 Version matricielle

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique ; on dit que M est positive si :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \, X^T.M.X \geq 0$$

Montrer que M est positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^+$.

Démonstration

$M = P^T.D.P$ avec $P \in O(n)$ et D diagonale.

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \, X^T.M.X = X^T.P^T.D.P.X = (PX)^T.D.(PX) = Y^T.D.Y$$

avec $Y = PX$. Donc

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \, X^T.M.X = \sum_{j=1}^{n} d_j . y_j^2$$

Si tous les d_j sont positifs, il est clair que M est positive.

Réciproquement

Supposons M positive ; soit λ une valeur propre et X un vecteur propre associé :

$$X^T.M.X = \lambda.X^T.X \geq 0$$

et, X étant non nul :

$$X^T.X = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 > 0$$

Donc $\lambda \geq 0$.

4.8.3 Définis positifs

Soit u un endomorphisme symétrique ; on dit que u est défini positif si :

$$\forall x \in E - \{0\}, \langle u(x), x\rangle > 0$$

Montrer que u est défini positif si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{+\star}$.

4.8.4 Inversibles

Soit u un endomorphisme symétrique ; u est défini positif si et seulement si u est positif et inversible.

4.8.5 Racine carrée d'un symétrique

Soit u un endomorphisme symétrique positif ; montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique positif v tel que

$$u = v^2$$

Démonstration

L'existence est assez facile ; unicité :

Soit v un endomorphisme symétrique positif tel que $u = v^2$; soit $\lambda_1, ..., \lambda_q$ les valeurs propres distinctes de v ; notons $\mu_j = \lambda_j^2$; on constate que les μ_j sont distincts, et on vérifie aisément que

$$\forall j,\ E_{\lambda_j}(v) \subset E_{\mu_j}(u)$$

Qu'en déduire ?

On sait que

$$\sum_{j=1}^{q} \dim\left(E_{\lambda_j}(v)\right) = n$$

et

$$\sum_{j=1}^{q} \dim\left(E_{\mu_j}(u)\right) \leq n$$

Donc les q inclusions sont des égalités ; ce qu'on peut aussi voir en écrivant la matrice de v dans une base adaptée.

Finalement

v est complètement déterminé :

Les valeurs propres de v sont les racines carrées des valeurs propres de u, et

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(v),\ E_\lambda(v) = E_{\lambda^2}(u)$$

4.9 Formules de Courant-Fischer

Exercice

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E ; soit

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$$

ses valeurs propres ; on note $q(x) = \langle u(x), x\rangle$ et S l'ensemble des vecteurs de norme 1 ; pour tout sous-espace F non nul, on note

$$m_F = \min_{F \cap S} q$$

Montrer que pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\lambda_k = \max_{\dim F = k} m_F$$

Remarque

m_F est bien un minimum car q est une fonction continue, et $F \cap S$ est un compact non vide.

Démonstration

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée telle que

$$\forall j, u(e_j) = \lambda_j . e_j$$

Remarquons que si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j . e_j$, alors

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . x_j^2$$

1e étape

Choisissons d'abord $F = Vect(e, ..., e_k)$; on montre que $m_F = \lambda_k$, minimum atteint en e_k.

2e étape

Soit maintenant F quelconque de dimension k ; soit $G = Vect\left(e_k, ..., e_n\right)$.

F et G ne sont pas en somme directe, car

$$\dim F + \dim G = n + 1 > n$$

Il existe donc un élément x de $F \cap G \cap S$.

$$\left\langle u\left(x\right), x\right\rangle = \sum_{j=k}^{n} \lambda_j . x_j^2 \leq \lambda_k$$

Donc $m_F \leq \lambda_k$.

5 Matrices antisymétriques

5.1 Définition

On dit que A est antisymétrique si $A^T = -A$; on note $A_n\left(\mathbb{R}\right)$ l'ensemble de ces matrices.

5.2 Exercice

Montrer que $A_n\left(\mathbb{R}\right)$ et $S_n\left(\mathbb{R}\right)$ sont supplémentaires dans $E = M_n\left(\mathbb{R}\right)$.

Réponse

Soit $t : M \to {}^tM$; t est un endomorphisme de $M_n\left(\mathbb{R}\right)$; $t \circ t = \mathrm{Id}$; on peut apliquer le lemme de décomposition des noyaux.

On peut aussi expliciter la décomposition :

$$M = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) + \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$$

Quelle est la dimension de $A_n\left(\mathbb{R}\right)$?

$$\dim A_n\left(\mathbb{R}\right) = \frac{n\left(n-1\right)}{2}$$

Remarque

$$\left\langle X, Y\right\rangle = \mathrm{tr}\,{}^tX.Y = \sum_{i,j} x_{i,j}.y_{i,j}$$

est le produit scalaire canonique sur E ; pour ce produit scalaire, $A_n\left(\mathbb{R}\right)$ est l'orthogonal de $S_n\left(\mathbb{R}\right)$ dans $E = M_n\left(\mathbb{R}\right)$.

5.3 Exercice

Si $A \in A_n\left(\mathbb{R}\right)$ et si n est impair, montrer que $\det A = 0$.

Démonstration

$$\det A = \det {}^tA = \det\left(-A\right) = \left(-1\right)^n \det A = -\det A$$

5.4 Exercice

Soit $A \in A_n\left(\mathbb{R}\right)$; si A possède une valeur propre réelle λ, alors $\lambda = 0$. De plus, $\det A \geq 0$.

Démonstration

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$AX = \lambda X$$

De manière analogue au cas où A est symétrique, on montre que

$$-\lambda.{}^tX.X = \lambda.{}^tX.X$$

Donc $\lambda = 0$. Le polynôme caractéristique χ_A ne s'annule donc pas sur $]0, +\infty[$ et est donc positif sur cet intervalle.

5.5 Exercice

Si $A \in A_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}\mathrm{i}$.

Démonstration

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$AX = \lambda X$$

On en déduit successivement :

$${}^tX.{}^tA = \lambda.{}^tX$$

$$-{}^t\overline{X}.A = \overline{\lambda}.{}^t\overline{X}$$

$$-{}^t\overline{X}.A.X = \overline{\lambda}.{}^t\overline{X}.X$$

$$-\lambda.{}^t\overline{X}.X = \overline{\lambda}.{}^t\overline{X}.X$$

Or ${}^t\overline{X}.X = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 > 0$, donc $\lambda = -\overline{\lambda}$.

6 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

6.1 Caractérisations

Théorème

Soit $u \in E^E$; il y a équivalence entre

a) u est linéaire et conserve la norme.

b) u est linéaire et transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

c) u conserve le produit scalaire.

Définition

Dans ce cas, on dit que u est une isométrie vectorielle, ou un automorphisme orthogonal.

L'ensemble des isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux) constitue un groupe, noté $O(E)$, pour la loi ... ?

Les isométries positives

Le groupe spécial linéaire :

$$SL(E) = \ker(\det) = \{M \in GL(E) \,/\, \det M = 1\}$$

Le groupe spécial orthogonal :

$$SO(E) = O(E) \cap SL(E)$$

C'est encore un sous-groupe de $GL(E)$; ses éléments sont appelés isométries positives, ou directes, ou rotations.

6.2 Matrices orthogonales

6.2.1 Remarque

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$; soit $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A ; soit $B = {}^tA.A$; quels sont les coefficients de B ?

Réponse

$$b_{i,j} = \langle C_i, C_j \rangle$$

6.2.2 Définition

$$O_n(\mathbb{R}) = O(n) = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tM.M = I_n \right\}$$

Notons $(M_1, ..., M_n)$ les colonnes de M ; ${}^tM.M = I_n$ signifie :

$$\forall i, j,\ {}^tM_i.M_j = \delta_i^j$$

autrement dit, les colonnes de M constituent une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

6.2.3 Théorème

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E ; soit $u \in L(E)$.
$u \in O(E)$ si et seulement si $M_B(u) \in O(n)$.

6.2.4 Propriété

Si $M \in O(n)$, alors $\det M = \pm 1$; réciproque ?

Réponse

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2.5 Définition

Le groupe spécial orthogonal :

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

Ce sont les matrices orthogonales de déterminant 1.

6.2.6 Compacité

Exercice

$O(n)$ est compact. Est-il convexe ? Connexe par arcs ?

6.3 Le produit mixte

6.3.1 Changement de base

Rappel : si B et B' sont deux bases de E

$$\det{}_B = \det{}_B(B').\det{}_{B'}$$

6.3.2 Le produit mixte

Si B et B' sont deux bases de E orthonormales directes, $\det_B = \det_{B'}$; c'est ce qu'on appelle le produit mixte. Notation :

$$[x_1, ..., x_n] = \det{}_B(x_1, ..., x_n)$$

C'est indépendant de la base orthonormée directe B.

6.3.3 Inégalité de Hadamard

Exercice

Soit B une base orthonormée de E espace euclidien de dimension n ; soit $x_1, ..., x_n$ n vecteurs de E ; montrer que

$$|[x_1, ..., x_n]| = |\det_B (x_1, ..., x_n)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

Démonstration

Supposons $B' = (x_1, ..., x_n)$ libre ; c'est donc une base ; soit $B_o = (f_1, f_2, ...f_n)$ l'orthonormalisée de B'.

$$|[x_1, ..., x_n]| = |\det_{B_o} (B')|$$

Or la matrice de passage M de B_0 à B' est triangulaire supérieure ; ses coefficients diagonaux sont

$$m_{j,j} = \langle f_j, x_j \rangle$$

Donc

$$\forall j, |m_{j,j}| = |\langle f_j, x_j \rangle| \leq \|x_j\|$$

D'où le résultat.

6.4 Décomposition OT

6.4.1 Exercice

Soit $M \in GL_n (\mathbb{R})$; il existe O matrice orthogonale, et T, matrice triangulaire supérieure inversible, telles que $M = OT$.

Démonstration

Soit B_c la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$; M est la matrice de passage de B_c à une base B ; soit B_o la base orthonormalisée de B ; alors :

$$M = OT$$

où O est la matrice de passage de B_c à B_o, et T est la matrice de passage de B_o à B.

6.4.2 Généralisation

Cas où M n'est pas supposée inversible.

Démonstration

Soit $M_k = M - \frac{1}{k} I_n$; M_k est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de k ; donc, à partir d'un certain rang k_0 :

$$M_k = O_k.T_k$$

Ensuite, $O(n)$ étant compact, il existe une suite extraite $\left(O_{\varphi(k)}\right)$ convergeant vers un $O \in O(n)$. De plus :

$$\forall k \geq k_0, \, {}^t O_{\varphi(k)}.M_{\varphi(k)} = T_{\varphi(k)}$$

Il reste à passer à la limite ; $T_n (\mathbb{R})$ est un sous-espace de dimension finie de $E = M_n (\mathbb{R})$, il est donc fermé dans E.

6.5 Réflexions

6.5.1 Définition

Soit $s \in L(E)$; on dit que s est une symétrie orthogonale, si $s^2 = Id$, et si les deux sous-espaces propres sont orthogonaux.

Réduction ?

6.5.2 Exercice

On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Déterminer $O(E) \cap S(E)$.

Réponse

Soit $u \in O(E) \cap S(E)$; u possède une base orthonormale de vecteurs propres de u ; de plus u conserve la norme, donc

$$\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$$

Conclusion, u est une symétrie orthogonale.

6.5.3 Définition

Soit $s \in L(E)$; on dit que s est une réflexion si s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Réduction ?

6.5.4 Exercice

Soit a et b deux vecteurs distincts de même norme ; montrer qu'il existe une réflexion s unique telle que $s(a) = b$.

Réponse

Nécessairement, $s(b) = a$ et $s(a - b) = b - a$.

Réciproquement

Soit D la droite engendrée par $b - a$, $H = D^{\perp}$, et s la réflexion par rapport à H.

$s(b - a) = a - b$; il suffit donc de montrer que $s(a + b) = a + b$. Or

$$a + b \in H$$

car ?

6.5.5 Exercice : l'ensemble des réflexions engendre $O(E)$

Par récurrence sur $n = \dim E$, à l'aide de l'exercice précédent.

6.5.6 Exercice : le centre de $O(E)$

Montrer que le centre de $O(E)$ est réduit à $\{Id, -Id\}$.

Démonstration

Plus généralement, soit $u \in L(E)$ commutant avec tout élément de $O(E)$.

Soit D une droite ; soit s la réflexion d'hyperplan $H = D^{\perp}$; u et s commutent, donc tout sous-espace propre de s est stable par u ; donc D est stable par u ; un exercice bien connu montre alors que u est une homothétie.

6.6 Réduction

6.6.1 Stabilité de l'orthogonal

Théorème

Soit u un élément de $O(E)$; si F est un sous-espace de E stable par u, $F^{\perp}$ est stable par u.

6.6.2 Lemme

Soit $u \in O(E)$; alors :
a) $v = u + u^{-1}$ est symétrique.
b) il existe une droite ou un plan stable par u.

Démonstration

Soit B une base orthonormale, et M la matrice de u ; la matrice de u^{-1} est $M^{-1} = M^T$ et celle de v est ${}^tM + M$, donc symétrique.

v étant symétrique, il possède un vecteur propre a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, v(a) = \lambda a$$

En composant par u :

$$u^2(a) + a = \lambda u(a)$$

Donc $F = \text{Vect}(a, u(a))$ est stable par u et de dimension 1 ou 2.

6.6.3 $SO(2)$

On rappelle que les éléments de $SO(2)$ sont les

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$SO(2)$ est abélien, isomorphe à $\mathbb{U}$.

Démonstration

Soit $M \in O(2)$; la première colonne étant de norme 1 se met sous la forme $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$; la deuxième, étant orthogonale à la première, est de la forme

$$\lambda. \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Donc

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\lambda.\sin\theta \\ \sin\theta & \lambda.\cos\theta \end{bmatrix}$$

On constate que $\lambda = \det M$.

Donc si $M \in SO(2)$, $\lambda = 1$.

Remarque

$$\forall \theta, \theta', \ R(\theta + \theta') = R(\theta) R(\theta')$$

6.6.4 $O(2) \setminus SO(2)$

Les éléments de $O(2) \setminus SO(2)$ sont les

$$S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Ce sont des réflexions.

6.6.5 Réduction d'un élément de $O(E)$

Théorème

Soit $u \in O(E)$; E est la somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels E_j stables par u, de dimension 1 ou 2 ; dans le cas où E_j est un plan, l'endomorphisme induit est une rotation.

Il existe donc une base orthonormale B pour laquelle $M_B(u)$ est diagonale par blocs, blocs
- de taille 1 : $[\pm 1]$
- de taille 2 : dans $SO(2)$.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$; c'est clair pour $n = 1$; soit $n \geq 2$; supposons la propriété vérifiée jusqu'à la dimension $n - 1$.

On sait qu'il existe une droite ou un plan stable par u : F ; $F^{\perp}$ est stable par u, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme de $F^{\perp}$ induit par u.

Remarque

Si F est un plan, et si u induit une réflexion sur F, il existe une base B_F orthonormale de F telle que

$$M_{B_F}(u_F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne deux blocs de taille 1.

6.6.6 Version matricielle

Soit $M \in O(n)$; il existe P matrice orthogonale telle que ${}^tP.M.P$ est diagonale par blocs, blocs

- de taille 1 : $[\pm 1]$
- de taille 2 : dans $SO(2)$.

6.6.7 Cas de $SO(E)$

Soit $u \in SO(E)$; il existe une base orthonormale B pour laquelle $M_B(u)$ est diagonale par blocs, blocs

- de taille 1 : $[1]$
- de taille 2 : dans $SO(2)$.

Démonstration

Les -1 sur la diagonale sont en nombre pair.

On les regroupe deux par deux pour obtenir $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ qui est dans $SO(2)$.

6.6.8 Connexité

Exercice

$SO(n)$, $GL_n^+(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$ sont-ils connexes par arcs ?

Réponse

$O(n)$: non, $GL_n(\mathbb{R})$: non.
$SO(n)$: oui.

On utilise la forme réduite et la connexité par arcs de $SO(2)$.

$GL_n^+(\mathbb{R})$: oui.

On remarque que dans la décomposition $M = OT$, T est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs ; l'ensemble de ces matrices est connexe par arcs. Comme de plus $\det M > 0$, $O \in SO(n)$ qui est aussi connexe par arcs.

Remarque : on peut aussi montrer la connexité par arcs de $GL_n^+(\mathbb{R})$ en utilisant la décomposition SO, ou encore les transvections (Algèbre linéaire chap 1).

7 Rotations en dimension 3

Ici, E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

7.1 Orientation d'un hyperplan par un vecteur normal

Ici, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n ; soit H un hyperplan et e_n un élément non nul de $H^\perp$.

On oriente H par les bases $(e_1, ..., e_{n-1})$ de H telles que $(e_1, ..., e_n)$ soit directe.

7.2 Réduction

Soit r une rotation différente de l'identité ; d'après ce qui précède, il existe une base orthonormale B directe telle que

$$M_B(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

7.3 La trace

La trace de r est

$$\mathrm{tr}(r) = 1 + 2\cos\theta$$

ce qui permet de déterminer $\cos\theta$; en particulier, $\cos\theta$ ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie ; c'est le cas de $|\sin\theta|$, mais pas de $\sin\theta$.

7.4 L'axe

L'espace propre $E_1(r)$ est de dimension 1 ; on l'appelle axe de r.

Le choix d'un vecteur directeur e_1 de l'axe induit une orientation du plan $e_1^\perp$ et détermine θ ; si on remplace e_1 par $-e_1$, θ est remplacé par $-\theta$.

7.5 Exemple

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

7.5.1 $M \in SO(3)$

La matrice est orthogonale car les colonnes sont de norme 1 et deux à deux orthogonales.

On montre que c'est une rotation, soit en calculant $\det M$, soit en constatant que :

$$C_3 = +C_1 \wedge C_2$$

7.5.2 Angle

$\cos\theta = \frac{1}{3}$

7.5.3 Axe

Dirigé par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7.6 Le signe de $\sin\theta$

7.6.1 1e méthode

Soit e_1 le premier vecteur de la base B ; c'est un vecteur unitaire de l'axe ; soit x un vecteur quelconque ; calculons $[e_1, x, r(x)]$ en utilisant la base B ; soit (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de x.

On obtient

$$[e_1, x, r(x)] = \sin\theta . \left(x_2^2 + x_3^2\right)$$

Le signe de $\sin\theta$ est donc celui de $[e_1, x, r(x)]$, sauf si x est sur l'axe ; on constate que si on remplace e_1 par $-e_1$, $\sin\theta$ est remplacé par $-\sin\theta$.

Retour à l'exemple

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; on trouve $[e_1, x, r(x)] < 0$.

7.6.2 2e méthode

Soit M la matrice de r dans une base orthonormale directe quelconque

$$B_0 = (i, j, k)$$

On calcule $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$; on obtient une matrice antisymétrique :

$$\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

Alors

$$p.i + q.j + r.k = \sin\theta . e_1$$

où e_1 est un vecteur directeur unitaire de l'axe.

A nouveau, on constate que si on remplace e_1 par $-e_1$, $\sin\theta$ est remplacé par $-\sin\theta$.

Retour à l'exemple

$$\frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc

$$p.i + q.j + r.k = \sin\theta . e_1 = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On obtient à la fois l'axe, et la valeur de $\sin\theta$.

7.6.3 Explication

Un lemme

Soit $u = p.i + q.j + r.k$ un élément quelconque de E ; soit

$$a : x \to u \wedge x$$

La matrice de a dans la base $B_0 = (i, j, k)$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

Application

$\frac{1}{2}(M - {}^tM)$ est la matrice de $a = \frac{1}{2}\left(r - r^{-1}\right)$ dans la base B_0.

Dans la base B, la matrice de $\frac{1}{2}\left(r - r^{-1}\right)$ est

$$M_B(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

On constate que a est l'endomorphisme

$$a : x \to \sin\theta . e_1 \wedge x$$

7.7 Les rotations qui commutent

Exercice

Soit r_1 et r_2 deux rotations distinctes de l'identité ; montrer qu'elles commutent seulement dans les deux cas suivants :

- elles ont le même axe,
- ou ce sont des demi-tours et leurs axes sont orthogonaux.

Démonstration

Supposons que l'une des deux, r_1 par exemple, n'est pas un demi-tour ; l'axe D_2 de r_2 est stable par r_1 ; donc $D_1 = D_2$.

En effet, D_1 est la seule droite stable par r_1.

Exercice

Le centre de $SO(3)$ est réduit à $\{I_3\}$.

7.8 Génération par les demi-tours

Exercice

$SO(3)$ est engendré par les demi-tours.

Démonstration

On montre successivement que :

- toute rotation dans $SO(2)$ est composée de deux réflexions.
- toute rotation dans $SO(3)$ est composée de deux réflexions.
- toute rotation dans $SO(3)$ est composée de deux demi-tours, en remarquant que si s est une réflexion, $-s$ est un demi-tour.

7.9 Conjugaison dans $SO(3)$

Exercice

Soient r_1, r_2 deux éléments de $SO(3)$. A quelle condition existe-t-il r dans $SO(3)$ telle que

$$r_2 = r \circ r_1 \circ r^{-1}$$

Réponse

Une CNS est $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$.

8 Complément : la décomposition SO

8.1 Dans $GL_n(\mathbb{R})$

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$; il existe un couple unique (S, O), avec S symétrique définie positive et O orthogonale, tel que

$$M = SO$$

Démonstration

Supposons l'existence ; alors

$$M^T = O^T.S$$

donc

$$M.M^T = S^2$$

S est donc l'unique racine carrée positive de $M.M^T$, et $O = S^{-1}M$.

Réciproquement, on vérifie que cette matrice O est orthogonale :

$$O.O^T = S^{-1}M.M^TS^{-1} = I_n$$

8.2 Dans $M_n(\mathbb{R})$

L'existence demeure et peut se démontrer en utilisant la compacité de $O_n(\mathbb{R})$.

8.3 $\mathrm{d}(0, SL_n(\mathbb{R}))$

Exercice

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et de la norme associée.

Montrer que

$$\mathrm{d}(0, SL_n(\mathbb{R})) = \sqrt{n}$$