Suites récurrentes

1 $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + ...\sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$

1- Trouver la limite de (u_n).
2- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3- Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq n$$
4- Montrer que $u_n = o\,(n)$.
5- Donner un équivalent de (u_n).

Indications

3- Par récurrence sur n.
4- Utiliser 2 et 3.
5- $u_n \sim \sqrt{n}$.

2 $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+n.u_n^2}$

On définit une suite par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = f_n\,(u_n)$ avec
$$f_n\,(x) = \frac{x}{1 + n.x^2}$$
1- Déterminer la limite de (u_n).
2- Montrer que :
$$\forall n \geq 2,\, u_n \leq \frac{1}{n}$$
3- Montrer que $(n.u_n)$ est croissante.
4- Trouver un équivalent de (u_n).

Réponse

1- On constate que (u_n) est bien définie.
$$\forall n \geq 1, 0 \leq u_{n+1} \leq M_n$$
où $M_n = \max f_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Donc (u_n) converge vers 0.
2- Par récurrence sur n. Facile pour $n = 2$.
Soit $n \geq 2$; supposons $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$; f_n étant croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$:
$$u_{n+1} = f_n\,(u_n) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$$
3- Soit $n \geq 2$.
$$(n+1)\,u_{n+1} \geq n.u_n \Longleftrightarrow (n+1)\,u_n \geq \left(1 + n.u_n^2\right).n.u_n$$
Après simplication :
$$(n+1)\,u_{n+1} \geq n.u_n \Longleftrightarrow u_n \leq \frac{1}{n}$$
ce qui est vrai.
4- $(n.u_n)$ est croissante et majorée par 1, donc converge. Soit L sa limite.
$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + n.u_n$$

Donc $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ tend aussi vers L ; d'où

$$\frac{1}{u_n} \sim nL$$

Conclusion :

$$L = 1$$

3 $\quad \frac{2}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n-2}}$

Trouver la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $\frac{2}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n-2}}$.

4 $\quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$

A quelle condition sur x_0 peut-on définir une suite par $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$? Dans ce cas, étudier la limite de (x_n).

Si $x_0 = 5$, montrer que $x_{1000} \in [45, 45.1]$ en utilisant $x_{n+1}^2 - x_n^2$. Tester avec Python.

Indications

(x_n) est définie si et seulement si $x_0 \neq 0$.

Supposons $x_0 > 0$; la suite est croissante ; si elle converge vers une limite u, alors

$$u = u + \frac{1}{u}$$

Impossible, donc (x_n) tend vers $+\infty$.

Supposons $x_0 = 5$.

$$\forall n \geq 0, x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{x_n^2}$$

Donc $x_n^2 \geq 2n + x_0^2$; donc $x_{1000}^2 \geq 2025$:

$$x_{1000} \geq 45$$

Ensuite, il faut majorer :

$$\forall k \geq 0, x_k^2 \geq 25 + 2k$$

Donc :

$$\forall n \geq 0, x_n^2 = x_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \leq 25 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{25 + 2k}$$

Donc :

$$x_n^2 \leq 25 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{25 + 2k} \leq 25 + 2n + \frac{1}{25} + \int_0^{n-1} \frac{\mathrm{d}t}{25 + 2t}$$

Enfin :

$$x_{1000}^2 \leq 2025 + \frac{1}{25} + 2.\ln 3 \leq 45.1^2$$

5 $\quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{n}$

Soit (u_n) définie par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{n}$.

1) Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas croissante
2) Montrer qu'elle est décroissante à partir d'un certain rang.
3) Montrer que (u_n) tend vers 0.
4) Exprimer (u_n) en fonction de n.
5) A l'aide du théorème de sommation des relations de comparaison, montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{n}$.
6) En déduire que $u_n \sim \frac{2}{n}$.

6 $\quad u_{n+1} = 1 - \frac{1}{3}.u_n^2$

Etudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{3}.u_n^2$.

7 $\quad u_{n+1} = \ln\left(1 + u_n + u_n^2\right)$

Etudier la convergence de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \ln\left(1 + u_n + u_n^2\right)$.

Dans le cas où la suite tend vers 0, en déterminer un équivalent.

8 $z_{n+1} = \frac{z_n}{2-z_n}$

Soit z_0 un complexe tel que $0 < |z_0| < 1$; on définit une suite par $z_{n+1} = \frac{z_n}{2-z_n}$; montrer que cette suite est bien définie, et qu'elle converge vers 0.

9 $\sqrt[3]{u_n.u_{n+1}.u_{n+2}}$

Soit (u_n) définie par u_0, u_1, u_2 strictement positifs et

$$u_{n+3} = \sqrt[3]{u_n.u_{n+1}.u_{n+2}}$$

Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite.

On pourra noter $v_n = \ln u_n$, et vérifier que $v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2}$ est constant.

10 $u_{n+1} = u_n + u_n^2$

On définit une suite de complexes par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1) Etudier le cas où $u_0 \in \mathbb{R}$.
2) Dans le cas où $u_0 \in \mathbb{C}$ et $|u_0| > 2$, montrer que $\lim\limits_{n} |u_n| = +\infty$.

Réponse

Cas où $|u_0| > 2$:

$$\forall n \geq 0, |u_{n+1}| = |u_n| . |1 + u_n| \geq |u_n| . (|u_n| - 1)$$

On en déduit par récurrence sur n que $(|u_n|)$ est strictement croissante et que :

$$\forall n \geq 0, |u_n| \geq |u_0| . (|u_0| - 1)^n$$

11 $u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$

On pose, pour z complexe

$$P(z) = z^3 - 1$$

et si z est non nul :

$$F(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$$

Soit $r \in]0, 1[$ et D le disque fermé de centre 1 et de rayon r. On définit une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = F(u_n)$$

a. Calculer u_n pour $1 \leq n \leq 10$ lorsque $u_0 = 1 + i$ puis $u_0 = -1 + i$
b. Montrer que pour tout z de D

$$|F(z) - 1| \leq \frac{2r + 3}{3(1 - r)^2} |z - 1|^2$$

c. Montrer que si $r = \frac{1}{3}$, $F(D) \subset D$.
d. En déduire que pour u_0 suffisamment proche de 1, la suite (u_n) est bien définie et converge vers 1.

Indications

Après calcul, pour tout z non nul :

$$F(z) - 1 = \frac{(2z + 1)(z - 1)^2}{3.z^2}$$

Si $z \in D$, $|z - 1| \leq r$, $|z| \leq 1 + r$, $|2z + 1| \leq 2r + 3$ et $|z| \geq 1 - r$, d'où $|F(z) - 1| \leq \frac{2r+3}{3(1-r)^2} |z - 1|^2$.

On suppose désormais $r = \frac{1}{3}$:

$$|F(z) - 1| \leq \frac{2r + 3}{3(1 - r)^2} |z - 1|^2 \leq \frac{2r + 3}{3(1 - r)^2}.r. |z - 1| = \frac{11}{12}. |z - 1| \leq |z - 1| \leq r$$

ce qui prouve que $F(D) \subset D$.

Si $u_0 \in D$, la suite est bien définie et

$$\forall n \geq 0, |u_n - 1| \leq \left(\frac{11}{12}\right)^n . |u_0 - 1|$$

ce qui montre que la suite (u_n) converge vers 1.

12 $f\left(x^2+a\right)=f(x)$

Soit $a \geq 0$; décrire les fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \geq 0,\ f\left(x^2+a\right)=f(x)$$

On distinguera les cas $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ et $a > \frac{1}{4}$.

Indications

Cas où $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$:
On étudie les suites vérifiant $u_{n+1}=u_n^2+a$; on montre que dans ce cas f est constante.
Cas où $a > \frac{1}{4}$:
Soit g continue sur $[0,a]$ telle que $g(0)=g(a)$; il existe alors une unique solution f dont g est la restriction à $[0,a]$.

13 $u_{n+2}=\ln(1+u_n)+\ln(1+u_{n+1})$

On définit (u_n) par $u_0=u_1=1$ et

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2}=\ln(1+u_n)+\ln(1+u_{n+1})$$

1- Si (u_n) converge, que dire de sa limite ?
2- Montrer que (u_n) est bornée.
3- Montrer que (u_n) converge.

Désormais u_0 et u_1 sont deux réels positifs quelconques. On pose

$$v_n=\sup_{k\geq n} u_k,\ w_n=\inf_{k\geq n} u_k$$

4- Montrer que (v_n) et (w_n) convergent.
5- Montrer (u_n) converge.

14 Fractions continues

Soit $x=x_0$ un réel. On définit deux suites par :

$$a_n=\lfloor x_n \rfloor,\ x_{n+1}=\frac{1}{x_n-a_n}$$

Montrer que ces suites sont finies si et seulement si x est rationnel.

15 $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{n+1}$

On définit une suite (u_n) par $u_0 \geq 0$ et

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1}=\frac{u_n^2}{n+1}$$

1- Montrer l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que
- si $u_0 < \alpha$, (u_n) tend vers 0,
- si $u_0 > \alpha$, (u_n) tend vers $+\infty$.

2- Que dire de (u_n) si $u_0=\alpha$?
3- Calculer une valeur approchée de α.

Indications

S'il existe n tel que $u_n \leq 1$, la suite tend vers 0. Sinon, elle tend vers $+\infty$.
S'il existe n tel que $u_n \geq 2(n+1)$, c'est vrai au rang suivant.
Dans le cas $u_0=\alpha$, elle tend vers $+\infty$.

$$\alpha \approx 1.661688$$