Compacts, connexes par arcs

1 Suite exhaustive de compacts

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer l'existence d'une suite croissante de compacts (K_n) telle que
- $\forall n \geq 0,\ K_n \subset U$
- Tout compact K contenu dans U est contenu dans l'un des K_n.

2 Le lemme de Lebesgue sur les compacts

Soit K un espace métrique compact recouvert par une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in K,\ \exists i \in I,\ B(x,\alpha) \subset U_i$$

Indications

Par l'absurde.

3 La propriété de Borel-Lebesgue

Soit K un espace métrique compact recouvert par une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$. Alors un nombre fini d'entre eux suffit à recouvrir K.

Indications

Utiliser le lemme de Lebesgue et la précompacité.

4 Le théorème de Stone-Weierstrass

On admet dans cet exercice la propriété de Borel-Lebesgue et le théorème de Weierstrass.

Enoncé

Soit K un espace métrique compact. Soit $C = \left(C^0(K,\mathbb{R}), \|\|_\infty\right)$.

Soit A une sous-algèbre unitaire de C qui sépare les points :

$$\forall x,y \in K,\ x \neq y \Longrightarrow \exists f \in A,\ f(x) \neq f(y)$$

On souhaite montrer que A est dense dans C.

1- Montrer que si f et g sont dans $\overline{A}$, $\min(f,g) \in \overline{A}$ et $\max(f,g) \in \overline{A}$.

2- Soit a et b deux éléments distincts de K. Montrer que

$$\forall u,v \in \mathbb{R},\ \exists f \in A,\ f(a) = u, f(b) = v$$

3- Soit $f \in C$, $\varepsilon > 0$, et $x \in K$.
Montrer l'existence de $g_x \in \overline{A}$ telle que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x \leq f + \varepsilon$.

4- Montrer que $\overline{A} = C$.

Indications

1- Approcher $x \to |x|$ à l'aide du théorème de Weierstrass.

3- Pour chaque $y \in K$, il existe $h_y \in A$ telle que f et h_y coïncident en x et y.
Il existe donc un voisinage ouvert de y sur lequel $h_y \leq f + \varepsilon$...

4- On fait un raisonnement analogue :
Pour chaque $x \in K$, il existe un voisinage ouvert de x sur lequel $g_x \geq f - \varepsilon$...

5 Dilatation dans un compact

Soit K un espace métrique compact et f une application de K dans K vérifiant

$$\forall x, y \in K,\ \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$$

Montrer que f est une isométrie surjective.

6 Le théorème de Riesz

Soit E un espace normé ; soit $K = B_f(0,1)$; on suppose K compacte. On va montrer que E est de dimension finie.

1- Montrer l'existence d'un nombre fini de points $x_1, ..., x_n$ de K tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B\left(x_j, \frac{1}{2}\right)$$

2- On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$; montrer que F est fermé dans E.

3- Soit $a \in E$ et

$$d = d(a, F)$$

Montrer que d est atteinte, c'est-à-dire

$$\exists b \in F,\ d = \|a - b\|$$

4- On suppose $d = 1$; aboutir à une contradiction.

5- Montrer que $E = F$.

7 Suites et convergence uniforme

Soit X une partie d'un espace normé, et (f_n) une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$.

1- On suppose que (f_n) converge uniformément sur X vers f. Montrer que f est continue.

On suppose maintenant que pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $x \in X$, $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

2- Montrer que (f_n) converge simplement vers f.

3- Montrer que f est continue.

4- En supposant de plus que X est compact, montrer que (f_n) converge uniformément sur X vers f.

Indications

1- Question de cours.

2- (x_n) suite constante.

3- Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $x \in X$.

On veut montrer que $f(x_n) \to f(x)$.

Avec la question **2**, il existe $(\varphi(n))$ strictement croissante telle que

$$\forall n \geq 1,\ \left|f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x_n)\right| \leq \frac{1}{n}$$

Il suffit donc de montrer que $f_{\varphi(n)}(x_n) \to f(x)$.

4- Notons $M_n = \|f - f_n\|_\infty$ et (x_n) telle que

$$\forall n \geq 0,\ M_n = |(f - f_n)(x_n)|$$

Si (M_n) ne tend pas vers 0, il existe $\delta > 0$ et une suite extraite $M_{\varphi(n)} \geq \delta$.

Ensuite, X étant compact, $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ possède une suite extraite convergente...

8 $z_{n+1} = f(z_n)$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On définit une suite (z_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = f(z_n)$$

On suppose que cette suite possède une unique valeur d'adhérence a. Montrer qu'elle converge.

Indications

On fixe $r > 0$. Soit $K = \overline{D(a,r)}$. On étudie

$$\{n \in \mathbb{N} /\, z_n \in K,\, z_{n+1} \notin K\}$$

9 Boules...

Soit E un EVN de dimension finie ; soit Ω une partie de E non vide bornée vérifiant :

Pour tout couple (x, y) d'éléments de Ω, il existe une boule ouverte B telle que

$$x, y \in B \subset \Omega$$

On va montrer que Ω est une boule ouverte.

1- Montrer que Ω est ouvert dans E.

2- On note r la borne supérieure de l'ensemble des rayons des boules ouvertes contenues dans Ω. Montrer l'existence de r.

3- A l'aide d'une suite de boules ouvertes $B(c_n, r_n)$ contenues dans Ω telle que (r_n) converge vers r, montrer l'existence d'une boule $B(c, r)$ contenue dans Ω.

4- Montrer que $\Omega \subset \overline{B(c,r)}$.

5- Montrer que $\Omega = B(c, r)$.

Indications

1- Avec $x = y$.

3- On montre que (c_n) est bornée, donc possède une valeur d'adhérence c.

4- Supposons $x \in \Omega$ avec $\|x - c\| > r$; on choisit un point y aligné avec c et x, du côté opposé.

10 $C \subset D \subset \overline{C}$

Soit E un espace vectoriel normé, C une partie convexe, et D telle que $C \subset D \subset \overline{C}$.

Montrer que D est connexe par arcs.

11 Sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^n$

Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ fermé, 0 étant non isolé. Montrer que G contient une droite vectorielle.

Indications

Soit

$$a_n = r_n u_n$$

une suite d'éléments de G qui converge vers 0, avec

$$\forall n \geq 0,\, r_n > 0, \|u_n\| = 1$$

Quitte à extraire, on peut supposer que (u_n) converge vers une limite u.

Soit $\lambda > 0$; à l'aide de

$$\left\lfloor \frac{\lambda}{r_n} \right\rfloor r_n u_n = \left\lfloor \frac{\lambda}{r_n} \right\rfloor a_n$$

on montre que $\lambda u \in G$.

12 Connexe dénombrable

Un espace métrique connexe par arcs contenant au moins deux points peut-il être dénombrable ?

Indications

Si γ est un chemin de a à b, utiliser

$$t \to \|\gamma(t) - \gamma(0)\|$$

13 $GL_2^+(\mathbb{R})$

Soit

$$G = GL_2^+(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{Det} M > 0\}$$

1- Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ un élément de G triangulaire supérieur. Montrer qu'il existe un chemin continu dans G de M à I_n.

2- Montrer que G est connexe par arcs.

14 Connexes de S^1

Soit A une partie connexe par arcs du cercle S^1. Montrer que $S^1 \setminus A$ est connexe par arcs.

15 $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y$

Soit

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, xy = 1\right\}$$

Soit $X = \mathbb{R}^2 \setminus H$.

1- H est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$? Connexe par arcs ?

2- Trouver le nombre de composantes connexes par arcs de X.

3- Montrer que

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy}$$

est constant sur toute composante connexe par arcs de X et déterminer ces constantes.

4- Montrer que

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Utilité, efficacité de cette formule ?

16 Le problème du volcan

Soit A un espace métrique ; on dit que A est non connexe s'il est l'union de deux fermés de A disjoints non vides.

1- Montrer qu'on peut remplacer fermés par ouverts.

2- Montrer que A est non connexe si et seulement si il existe une application continue non constante de A dans $\mathbb{N}$.

3- Montrer que connexe par arcs implique connexe.

4- Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{R}$?

5- Soit (u_n) une suite de réels telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble V des valeurs d'adhérence est un intervalle.

6- Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble V des valeurs d'adhérence est connexe.

17 Un connexe non connexe par arcs

Soit

$$G = \left\{\left(x, \sin \frac{1}{x}\right) / \, x \in \left]0, +\right[\infty\right\}$$

1- Montrer que G est connexe par arcs.

2- Déterminer $X = \overline{G}$.

3- Montrer que toute fonction continue sur G à valeurs dans $\{0, 1\}$ est constante.

4- Montrer que toute fonction continue sur X à valeurs dans $\{0, 1\}$ est constante.

5- Montrer que X n'est pas connexe par arcs.