Fonctions Convexes

Contents

1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel E

1.1 Barycentre

Définition

Soit $a_1, ..., a_n$ des points de E ; soit $t_1, ..., t_n$ des réels dont la somme est non nulle ; le barycentre des points $a_1, ..., a_n$ affectés des coefficients $t_1, ..., t_n$ est

$$a = \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j.a_j}{\sum_{j=1}^{n} t_j}$$

Remarque

On peut aussi écrire

$$a = \sum_{j=1}^{n} s_j.a_j$$

avec des coefficients de somme 1. Il suffit de poser $s_j =$?

$$s_j = \frac{t_j}{\sum_{k=1}^{n} t_k}$$

Remarque

Centre de gravité, centre de masse.

1.2 Convexes

Notation

Soit x et y deux éléments de E ; on note

$$[x, y] = \{(1-t)\,x + ty / \, t \in [0, 1]\}$$

Définition

On dit qu'une partie A de E est convexe si :

$$\forall x, y \in A, \; [x, y] \subset A$$

Exercice

Soit A une partie de E ; l'ensemble des barycentres des éléments de A à coefficients positifs est convexe.

Indication

Examiner

$$(1-t)\,.\sum_{j=1}^{n} s_j.a_j + t.\sum_{j=1}^{m} s'_j.a'_j$$

1.3 Enveloppe convexe

1.3.1 Intersection de convexes

Exercice

Toute intersection de parties convexes de E est convexe.

Démonstration

Soit $(C_j)_{j \in J}$ une famille de convexes et C leur intersection.

Soit x et y deux éléments de C.

$$\forall j \in J,\ [x, y] \subset C_j$$

car $C_j$est convexe.

Donc $[x, y] \subset C$. Finalement C est convexe.

1.3.2 Exercice

Soit A une partie de E ; l'ensemble des parties convexes de E contenant A possède un plus petit élément $C(A)$; on l'appelle enveloppe convexe de A ; exemples.

Démonstration

Soit B l'intersection des parties convexes de E contenant A.

- B est convexe.
- B contient A.
- Soit B' une partie convexe de E contenant A ; $B \subset B'$, pourquoi ?

1.4 Intervalles

Rappel

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

1.5 Convexes et barycentres

1.5.1 Théorème

Une partie A de E est convexe si et seulement si tout barycentre d'éléments de A à coefficients positifs est un élément de A.

1.5.2 Démonstration

Par récurrence sur le nombre n de points. C'est clair pour $n = 1$; pour $n = 2$?

Soit $n \geq 3$; supposons la propriété vérifiée au rang $n - 1$; soit

$$a = \sum_{j=1}^{n} s_j.a_j$$

on suppose $s_n \neq 1$, sinon c'est évident.

$$a = \sum_{j=1}^{n} s_j.a_j = (1 - s_n) . \sum_{j=1}^{n-1} \frac{s_j}{1 - s_n}.a_j + s_n a_n$$

Donc

$$a = (1 - s_n)\, b + s_n a_n$$

avec $b =$?

$$b = \sum_{j=1}^{n-1} s'_j.a_j$$

où $s'_j =$?

$$s'_j = \frac{s_j}{\sum_{k=1}^{n-1} s_k} = \frac{s_j}{1 - s_n}$$

1.5.3 Exercice

$C(A)$ est l'ensemble des barycentres des éléments de A à coefficients positifs.

1.6 Points extrémaux

Exercice

Soit A une partie convexe de E ; on dit que a est un point extrémal de A si $A \setminus \{a\}$ est convexe ; quels sont les points extrémaux d'une boule dans $\mathbb{R}^2$, pour différentes normes ?

1.7 Complément : le théorème de Carathéodory

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n.

1.7.1 Lemme

Soit $q \geq n+2$; soit $a_1, ..., a_q$ des points de E.

Alors il existe des réels non tous nuls $\mu_1, ..., \mu_q$ tels que

$$\sum_{j=1}^{q} \mu_j.a_j = 0, \ \sum_{j=1}^{q} \mu_j = 0$$

Démonstration

On peut utiliser l'application suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^q & \rightarrow & E \times \mathbb{R} \\ (\mu_1, ..., \mu_q) & \rightarrow & \left(\sum_{j=1}^{q} \mu_j.a_j, \sum_{j=1}^{q} \mu_j \right) \end{array} \right.$$

Autre méthode

Utiliser le fait que $(a_1 - a_q, ..., a_{q-1} - a_q)$ est liée.

1.7.2 Exercice

Soit a barycentre de q éléments de E à coefficients positifs ; alors a est barycentre à coefficients positifs de seulement $n+1$ d'entre eux.

Un dessin en dimension 2.

Démonstration

On suppose $q \geq n+2$ et $a = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j a_j$; alors,

$$a = \sum_{j=1}^{q} (\lambda_j + t\mu_j)\, a_j$$

L'un au moins des μ_j est strictement positif, et l'un au moins des μ_j est strictement négatif ; on peut choisir

$$t = \min_{\mu_j < 0} -\frac{\lambda_j}{\mu_j} \text{ ou } t = \max_{\mu_j > 0} -\frac{\lambda_j}{\mu_j}$$

et on obtient a barycentre de $q-1$ des a_j.

2 Fonctions convexes d'une variable réelle

2.1 Définitions

2.1.1 Cas général

Soit C une partie convexe d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et $f : C \to \mathbb{R}$.

On dit que f est convexe sur C si pour tout (a, b) de C^2 et tout λ de $[0, 1]$:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$$

2.1.2 Cas des fonctions d'une variable réelle

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (a, b) de I^2 et tout λ de $[0, 1]$:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$$

On se limitera à ce cas.

2.1.3 Corde

Soit c la fonction affine qui coïncide avec f aux points a et b ; soit

$$p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = f(a) + p.(x - a)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, c((1-\lambda)a + \lambda b) = (1-\lambda) c(a) + \lambda c(b)$$

La convexité de f signifie qu'entre a et b, le graphe de f est sous celui de c.

2.1.4 Concavité

Définition

On dit que f est concave si $-f$ est convexe. Si f est convexe, que dire de

$$g : x \to f(-x)$$

2.2 Premières propriétés

2.2.1 Somme, produit par un scalaire ?

Si f et g sont convexes sur I, et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda f + g$ est convexe sur I.

2.2.2 Suites de fonctions convexes

Exercice

Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions convexes sur I qui converge simplement sur I vers f, alors f est convexe.

Démonstration

On fixe a, b dans I et λ dans $[0, 1]$.

$$\forall n \geq 0,\ f_n((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda) f_n(a) + \lambda f_n(b)$$

Il suffit de passer à la limite.

2.2.3 Sup de fonctions convexes

Exercice

Soit f et g convexes sur I.

a) Montrer que $\max(f,g)$ est convexe.

b) Que dire de $\min(f,g)$?

c) Soit $(f_j)_{j\in J}$ une famille de fonctions convexes sur I ; montrer que si $f=\sup\limits_j f_j$ existe, alors f est convexe.

Démonstration de c

On fixe a,b dans I et λ dans $[0,1]$.

$\forall j\in J,\ f_j((1-\lambda)a+\lambda b)\leq(1-\lambda)f_j(a)+\lambda f_j(b)\leq(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$

majorant indépendant de j.

Donc, par passage à la borne supérieure :

$$f((1-\lambda)a+\lambda b)\leq(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$$

2.2.4 Produit de fonctions convexes

Exercice

Le produit de deux fonctions convexes ne l'est pas toujours.

2.3 Caractérisation 1 : épigraphe

Définition

Epigraphe de f :

$$E=\{(x,y)\in I\times\mathbb{R}\,/\,y\geq f(x)\}$$

Théorème

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si l'épigraphe de f est convexe.

Démonstration

Supposons f convexe sur l'intervalle I.

Soit (a,u) et (b,v) deux éléments de l'épigraphe :

$$f(a)\leq u,\ \ f(b)\leq v$$

Soit $\lambda\in[0,1]$; soit

$$(c,w)=(1-\lambda).(a,u)+\lambda.(b,v)$$

$$w=(1-\lambda)u+\lambda v\geq(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)\geq f((1-\lambda)a+\lambda b)=f(c)$$

Donc $(c,w)\in E$.

La réciproque est analogue.

2.4 Caractérisation 2 : pentes

2.4.1 Définition

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$; si $x\neq y$, on appelle pente entre x et y :

$$p(x,y)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Remarquons que $p(x,y)=p(y,x)$.

2.4.2 Théorème

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si pour tout a de I,

$$x \to p(a, x)$$

est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Démonstration

Supposons que pour tout a de I, $x \to p(a, x)$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Supposons $a < b < c$.

Quitte à soustraire une application affine, on peut supposer que

$$f(a) = f(c) = 0$$

Donc :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = p(a, b) \leq p(a, c) = 0$$

Donc

$$f(b) \leq 0$$

Conclusion : f est convexe.

Réciproque

Analogue ; la convexité de f implique $f(b) \leq 0$, donc :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = p(a, b) \leq p(a, c) = 0 \leq p(b, c) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

2.4.3 Remarque

Soit f une fonction convexe sur I ; soit $a < b$ dans I ; le graphe de f est au dessus de la corde sur $I \setminus [a, b]$.

Démonstration

Supposons par exemple $a < b < x$.

$$p = p(a, b) \leq p(a, x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

D'où

$$f(x) \geq f(a) + p(x - a)$$

2.4.4 Dérivable à droite et à gauche

Exercice

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I ouvert ; montrer que f est dérivable à droite et à gauche sur I ; une fonction convexe est-elle toujours continue ?

2.4.5 Minimum

Exercice

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I ; si f atteint un minimum local en un point a, c'est un minimum global.

2.4.6 Bornée

Que dire d'une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$?

Réponse

Elle est constante d'après **2.4.3** ; en détail :

Supposons par exemple $a < b$ et $p = p(a, b) > 0$; alors :

$$\forall x > b, \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq p$$

d'où f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, impossible.

Variante

Que dire d'une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}^+$?

Réponse

Elle est décroissante.

2.5 Inégalité de convexité

2.5.1 Théorème

Soit f une fonction convexe sur I ; soit $n \geq 2$ et $x_1, ..., x_n$ des points de I ; soit $t_1, ..., t_n$ des réels positifs de somme 1.

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(x_j)$$

L'image de la moyenne est inférieure ou égale à la moyenne des images.

2.5.2 Démonstration

Utiliser l'épigraphe.

2.5.3 Un exemple

Soit $x_1, ..., x_n$ des réels strictement positifs ; alors :

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$$

2.5.4 Version probabilités

Soit f une fonction convexe sur I ; soit X une variable aléatoire d'image finie contenue dans I.

Alors

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

Démonstration

Appliquer la formule avec $t_j = \mathbb{P}(X = x_j)$.

3 Fonctions convexes dérivables

3.1 Caractérisation

3.1.1 Théorème

Une fonction dérivable f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si f' est croissante.

3.1.2 Démonstration

Soit f une fonction dérivable et convexe sur I ; soit $a < b$.

$$\forall x \in \left]a, b\right[, p(a, x) \leq p(a, b)$$

D'où par passage à la limite :

$$f'(a) \leq p(a, b)$$

De même, $p(a, b) \leq f'(b)$; donc

$$f'(a) \leq f'(b)$$

Réciproque

Supposons f' croissante sur I ; soit $a < b$; soit c la corde entre a et b. On étudie les variations de $g = f - c$ entre a et b.

g est nulle en a et b, donc

$$\exists d \in \left]a, b\right[, g'(d) = 0$$

g' étant croissante, $g' \leq 0$ sur $[a, d]$ et $g' \geq 0$ sur $[d, b]$.

Finalement, $g \leq 0$ sur $[a, b]$.

3.1.3 Remarque

Une fonction deux fois dérivable f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si f'' est positive.

3.2 Tangentes

Théorème

Soit f une fonction dérivable et convexe sur I ; le graphe de f est au dessus de toute tangente.

Démonstration

Soit $a < x$ deux éléments de I ; de même qu'au dessus :

$$f'(a) \leq p(a, x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

D'où

$$f(x) \geq f(a) + (x - a) f'(a)$$

3.3 Exemples

3.3.1 exp

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$

3.3.2 ln

$\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$

3.3.3 sin

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$

3.3.4 Exercice

Inégalité de Young

Si a, b, p, q sont strictement positifs, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Démonstration

Utiliser la convexité de exp.

4 Compléments

4.1 La fonction Γ

4.1.1 Convexité de Γ

Montrer que Γ est convexe ; à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\ln(\Gamma)$ est convexe.

Démonstration

On va montrer que $(\Gamma')^2 \leq \Gamma.\Gamma''$. Fixons $x > 0$. On écrit

$$\forall t > 0, e^{-t}.t^{x-1}.\ln t = \left(e^{-\frac{t}{2}}.t^{\frac{x-1}{2}}\right).\left(e^{-\frac{t}{2}}.t^{\frac{x-1}{2}}.\ln t\right)$$

4.1.2 Une caractérisation

Soit f une fonction continue sur $]0,+\infty[$, strictement positive, vérifiant :
a) $f(1) = 1$.
b) $\ln f$ est convexe.
c) $\forall x > 0, f(x+1) = xf(x)$
Alors $f = \Gamma$.

Démonstration

Notons $g = \ln f$; remarquons que $f(n+1) = n!$ pour tout entier n ; fixons $x \in]0,1[$. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$p(n,n+1) \leq p(n+1,n+1+x) \leq p(n+1,n+2)$$

d'où : $x.\ln n \leq g(x+n+1) - \ln n! \leq x.\ln(n+1)$; d'où :

$$1 \leq \frac{x(x+1)...(x+n)}{n^x.n!} f(x) \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x$$

Conclusion ?

4.2 Un problème de périmètre

Soit $n \geq 3$ fixé ; cherchons le polygone à n côtés de périmètre maximal inscrit dans un cercle donné de rayon 1.

$$P = 2\sum_{k=1}^{n} \sin\theta_k$$

les θ_k étant positifs et de somme π ; sin étant concave sur $[0,\pi]$:

$$\sin\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\sum_{k=1}^{n}\theta_k}{n} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$$

Conclusion : $P \leq 2n\sin\frac{\pi}{n}$, valeur atteinte quand le polygone est régulier.

4.3 Le périmètre d'une ellipse

On donne le paramétrage d'une ellipse :

$$\{x(t) = a.\cos t, y(t) = b.\sin t\}$$

Son aire est $S = \pi ab$; son périmètre est

$$P = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Chercher parmi les ellipses d'aire donnée celles qui ont le plus petit périmètre, en utilisant la concavité de la fonction racine carrée.

Réponse

$$P = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 + b^2 \cos^2} \geq \int_0^{2\pi} a.\sin^2 + b.\cos^2 = \pi\,(a+b) \geq 2\pi\sqrt{ab}$$

Donc

$$P^2 \geq 4\pi S$$

avec égalité si $a = b$.

4.4 Inégalité de Jensen

4.4.1 Enoncé

Soit φ continue sur $[a,b]$ à valeurs dans I ; soit f convexe sur I ; alors

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \circ \varphi$$

L'image de la moyenne est inférieure ou égale à la moyenne des images.

Remarque

Il faut d'abord vérifier que $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \in I$.

4.4.2 Démonstration 1

Sommes de Riemann et passage à la limite.

4.4.3 Démonstration 2

Dans le cas où f est dérivable : soit

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi$$

et $A = f'(m)$.

$$\forall t \in [a,b]\,,\ f(\varphi(t)) \geq f(m) + A(\varphi(t) - m)$$

Il suffit d'intégrer sur $[a,b]$.

4.4.4 Variante en probabilités

Soit f convexe sur I ; soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans I.

Si $E(X)$ et $E(f(X))$ existent, alors

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

Démonstration

Soit $m = E(X)$.

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(m) + A(x - m)$$

D'où

$$f(X) \geq f(m) + A(X - m)$$

L'espérance étant croissante :

$$E(f(X)) \geq f(m) + A(m - m) = f(E(X))$$

4.5 L'inégalité de Hölder

4.5.1 Notations

Soit $p > 1$; dans $E = \mathbb{R}^n$, on note

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Remarquons que :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda.x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$$

4.5.2 Enoncé

On suppose $p > 1, q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; par exemple $p = q = 2$.

Soit $x, y \in E$; montrer que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$$

4.5.3 Cas particulier facile

$$\|x\|_p = \|y\|_q = 1$$

On utilise l'inégalité de Young.

4.5.4 Cas général

On suppose x et y non nuls. On pose $\alpha = \|x\|_p, \beta = \|y\|_q$ et

$$u = \frac{x}{\|x\|_p}, v = \frac{y}{\|y\|_q}$$

Alors :

$$x = \alpha.u, \; y = \beta.v$$

avec $\alpha = \|x\|_p, \beta = \|y\|_q, \|u\|_p = \|v\|_q = 1$. On applique le cas particulier :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \alpha.\beta \left|\sum_{j=1}^{n} u_j v_j\right| \leq \alpha.\beta. \|u\|_p \, \|v\|_q = \alpha.\beta = \|x\|_p \, \|y\|_q$$

4.6 Une caractérisation

4.6.1 Exercice

Soit f continue sur I ; on suppose que :

$$(H) : \forall x, y \in I, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

Montrer que f est convexe.

4.6.2 Démonstration 1

Soit $a < b$ dans I ; remarquons que l'hypothèse (H) vérifiée par f l'est aussi par $g = f - c$, où c est la corde.

Supposons par l'absurde que le maximum de g sur $J = [a, b]$ est strictement positif :

$$g(x_0) = \max_J g > 0$$

On obtient une contradiction, avec x_0 milieu de ?

Réponse

Si x_0 est plus proche de a, x_0 est milieu d'un segment $[a,c] \subset [a,b]$, sinon x_0 est milieu d'un segment $[c,b] \subset [a,b]$. Un dessin...

4.6.3 Autre méthode

Montrer d'abord que $\left\{ \frac{k}{2^n} / k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4.7 Convexité stricte

Une fonction f est strictement convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout couple (a,b) d'éléments de I distincts, et pour tout λ de $]0,1[$:

$$f\left(\left(1-\lambda\right)a+\lambda b\right) < \left(1-\lambda\right)f\left(a\right)+\lambda f\left(b\right)$$

Exercice

f est strictement convexe sur I si et seulement si pour tout a de I,

$$x \to p\left(a,x\right)$$

est strictement croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Exercice

f est strictement convexe sur I si et seulement si f' est strictement croissante.

Exercice

Avec f'' ?

Attention : g strictement croissante n'est pas équivalent à $g' > 0$.

4.8 Caractère C^1

Exercice

Soit f une fonction dérivable et convexe sur I ; alors f est de classe C^1.

Démonstration

f' est croissante sur I ; un exercice affirme que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires ; on en déduit que f' est continue sur I.